Письма в ЭЧАЯ. 2015. Т. 12, № 2(193). С. 420–427



# ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ФОН НЕЙМАНА В ТЕОРИЯХ С НЕФИЗИЧЕСКИМИ ЧАСТИЦАМИ

*К. В. Антипин* [а, 1], *Ю. С. Вернов* [б], *М. Н. Мнацаканова* [в]

[а] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
[б] Институт ядерных исследований РАН, Москва
[в] Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

Теорема единственности фон Неймана распространена на случай антифоковского представления канонических коммутационных соотношений.

Von Neumann's uniqueness theorem is extended to the class of anti-Fock representations of the canonical commutation relations.

PACS: 03.65.Fd

## ВВЕДЕНИЕ

Канонические коммутационные соотношения (ККС), или, иначе, представления алгебры Гейзенберга, составляют основу квантовой теории. В случае одной степени свободы импульс и координата представляются самосопряженными операторами $P$ и $Q$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, удовлетворяющими соотношению

$$[P, Q] = -iI. \tag{1}$$

Переход к любому конечному числу степеней свободы, а именно к соотношениям

$$[P_i, Q_j] = -i\delta_{ij}I, \quad [Q_i, Q_j] = 0, \quad [P_i, P_j] = 0, \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant n, \tag{2}$$

не влечет за собой каких-либо существенных трудностей, и все основные результаты для ККС допускают непосредственное обобщение [1].

Известно, что не существует представления алгебры Гейзенберга ККС ограниченными операторами [2]. В связи с этим более удобным оказывается представление ККС в форме Вейля:

$$\mathrm{e}^{itP}\mathrm{e}^{isQ} = \mathrm{e}^{ist}\mathrm{e}^{isQ}\mathrm{e}^{itP}, \quad s, t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Действительно, согласно теореме Стоуна [3], операторы $\mathrm{e}^{itP}$ и $\mathrm{e}^{isQ}$ являются ограниченными.

[1] E-mail: kv.antipin@physics.msu.ru

Соотношение (3), однако, удовлетворяется только для определенного класса представлений ККС, который включает представления Шредингера [4, 5]. Операторы шредингеровского представления $p$, $q$ определяются на пространстве $L^2(-\infty,\infty)$ посредством соотношений

$$(pf)(x) = -i\frac{\partial}{\partial x}f(x), \quad (qf)(x) = xf(x). \tag{4}$$

Представления ККС, унитарно-эквивалентные шредингеровскому, обычно называются регулярными [4, 5].

Отметим, что даже в случае одной степени свободы существуют представления ККС, которые унитарно не эквивалентны шредингеровскому, т. е. являются нерегулярными. К примеру, если операторы (4) определить на $L^2(a,b)$, $a,b\in\mathbb{R}$, то они будут образовывать нерегулярное представление ККС.

Таким образом, для описания регулярных представлений необходимо наложить некоторые дополнительные условия на операторы $P$ и $Q$. Важным результатом в этом направлении является теорема Реллиха [6] и Диксмье [7].

**Теорема 1.** *Для того чтобы пара $(P,Q)$ замкнутых симметричных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, образовывала регулярное представление ККС, необходимо и достаточно, чтобы существовало линейное многообразие $\mathcal{D}$, содержащееся в $\mathcal{D}(P)\cap\mathcal{D}(Q)$, плотное в $\mathcal{H}$ и такое, что:*

*1) $\mathcal{D}$ устойчиво относительно действия операторов $P$ и $Q$,*

*2) сужение оператора $(P^2+Q^2)$ на $\mathcal{D}$ существенно самосопряженно,*

*3) равенство $PQ-QP=-iI$ выполняется на $\mathcal{D}$.*

Если коммутационные соотношения могут быть заданы в форме Вейля (3), то справедлива следующая теорема единственности, доказанная фон Нейманом [8].

**Теорема 2** (теорема фон Неймана)**.** *Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\{U(t)\mid t\in\mathbb{R}\}$ и $\{V(s)\mid s\in\mathbb{R}\}$ — две слабонепрерывные однопараметрические группы унитарных операторов, действующих на $\mathcal{H}$ и таких, что*

$$U(t)V(s) = \mathrm{e}^{its}\,V(s)U(t) \quad \forall t,s\in\mathbb{R};$$

*тогда представление $\{U(t), V(s)\mid t,s\in\mathbb{R}\}$ унитарно-эквивалентно прямой сумме представлений Шредингера.*

Отметим, что соотношение (1) может быть записано в форме

$$[a,a^*] = I, \tag{5}$$

где

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q+iP), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q-iP). \tag{6}$$

Очевидно, что в представлении Шредингера существует вакуумный вектор $\psi_0 = C\exp(-x^2/2)$, удовлетворяющий условию

$$a\psi_0 = 0. \tag{7}$$

Представления ККС, для которых выполняется (7), называются представлениями Фока. Можно показать, что все представления Фока унитарно-эквивалентны. В частности, каждое представление Фока унитарно-эквивалентно шредингеровскому и, тем самым, является регулярным.

Свойства представлений ККС в форме Вейля в гильбертовом пространстве были подробно изучены в [9]. Однако в современных калибровочных квантовых теориях, где в ковариантной калибровке возникают нефизические частицы, приходится иметь дело с пространством с индефинитной метрикой [10–12], а именно с пространством Крейна. Чтобы пояснить это утверждение, заметим, что скалярное произведение, которое определяет вероятность наблюдения частицы, не может быть положительным для нефизических частиц. Кроме того, скалярные произведения для всех нефизических частиц не могут быть равны нулю одновременно. Действительно, в этом случае все скалярные произведения, содержащие вектор, описывающий нефизические частицы, равны нулю. В этом легко убедиться, воспользовавшись неравенством Шварца

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y),$$

которое справедливо в произвольном пространстве с неотрицательной метрикой. Следовательно, хотя бы для одного из векторов, описывающих нефизические частицы, скалярное произведение на самого себя должно быть отрицательным. Это означает, что соответствующее пространство является пространством с индефинитной метрикой. Подчеркнем, что в пространстве с индефинитной метрикой всегда существуют как положительные векторы, так и отрицательные, а также нейтральные [14]. Отметим, что множество нейтральных векторов может содержать подмножество изотропных векторов, которые ортогональны всем векторам рассматриваемого пространства. Известно, что произвольное пространство с индефинитной метрикой является суммой пространства, состоящего из изотропных векторов, и невырожденного пространства, не содержащего таких векторов. Поскольку изотропные векторы никак не влияют на данную теорию, в квантовой теории поля рассматриваются только невырожденные пространства. Простейшим невырожденным пространством с индефинитной метрикой является пространство Крейна, основные свойства которого описаны в следующем разделе. Отметим, что данная работа является также шагом к получению теоремы фон Неймана в калибровочной теории, в которой число координат и импульсов бесконечно. В [13] было показано, что, помимо представления Фока, в пространстве Крейна возникают два других типа представлений: одно с отрицательным спектром оператора числа частиц $N = a^*a$ (антифоковский случай), другое — с двусторонним дискретным спектром. Целью настоящей работы является обобщение теоремы фон Неймана на случай антифоковского представления в пространстве Крейна.

## 1. ПРОСТРАНСТВО КРЕЙНА

В этом разделе кратко приведены основные свойства пространств Крейна. За детальным обзором можно обратиться к [14–16].

Если линейное пространство $\mathcal{K}$ со скалярным произведением (вообще говоря, индефинитным) допускает разложение в прямую сумму вида

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ + \mathcal{K}^-, \quad \mathcal{K}^+ \perp \mathcal{K}^-, \tag{8}$$

где $\mathcal{K}^+$ и $\mathcal{K}^-$ — полные подпространства с положительно и отрицательно определенными метриками соответственно, то $\mathcal{K}$ является пространством Крейна.

В соответствии с данным определением класс пространств Крейна включает гильбертово пространство ($\mathcal{K}^- = 0$), а также «антигильбертово» пространство ($\mathcal{K}^+ = 0$).

Поскольку для каждого вектора в пространстве Крейна справедливо разложение

$$x = x_+ + x_-, \quad x_\pm \in \mathcal{K}_\pm, \tag{9}$$

скалярное произведение элементов $x$ и $y$ может быть записано в виде

$$(x, y) = (x_+, x_+) + (y_-, y_-). \tag{10}$$

Оператор $J$ называется оператором фундаментальной симметрии, если

$$J(x_+ + x_-) = x_+ - x_-. \tag{11}$$

Следующие свойства легко могут быть проверены:

1) $J$ — обратимый оператор, и $J^{-1} = J$;

2) $J$ — самосопряженный оператор по отношению как к индефинитному, так и к положительно определенному скалярному произведению, которое будет введено ниже.

Покажем, что выражение

$$(x, y)_J = (x_+, y_+) - (x_-, y_-) \tag{12}$$

задает положительно определенное скалярное произведение в пространстве Крейна, называемое $J$-произведением. В самом деле,

$$(x, x)_J = (x_+, x_+) - (x_-, x_-) \geqslant 0.$$

Норма в $\mathcal{K}$ может быть введена так:

$$\|x\|_J = +\sqrt{(x, x)_J}, \quad x \in \mathcal{K}. \tag{13}$$

В этом случае она называется $J$-нормой. Легко видеть, что оператор фундаментальной симметрии следующим образом связывает индефинитное и положительно определенное скалярные произведения:

$$(x, y) = (x, Jy)_J, \quad (x, y)_J = (x, Jy). \tag{14}$$

Нетрудно получить соотношение между операторами $A^*$ и $A^+$, где символы «$*$» и «$+$» обозначают сопряженные операторы по отношению к $J$-произведению и внутреннему произведению соответственно. Действительно, из равенств

$$(Ax, y) = (Ax, Jy)_J = (x, A^* Jy)_J = (x, JA^* Jy) \tag{15}$$

следует, что

$$A^+ = JA^* J. \tag{16}$$

## 2. РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ ГЕЙЗЕНБЕРГА В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА

Предположим, что оператор числа частиц $N = a^*a$ имеет собственный вектор $\psi_\alpha$ в гильбертовом пространстве и

$$N\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha. \tag{17}$$

Покажем, что $\alpha \geqslant 0$ в гильбертовом пространстве. В самом деле, если $\alpha = -\beta$, $\beta > 0$, то

$$(N\psi_{-\beta}, \psi_{-\beta}) = -\beta(\psi_{-\beta}, \psi_{-\beta}) \leqslant 0. \tag{18}$$

Но, с другой стороны,

$$(N\psi_{-\beta}, \psi_{-\beta}) = (a\psi_{-\beta}, a\psi_{-\beta}) \geqslant 0. \tag{19}$$

Из этих двух неравенств следует, что $\psi_{-\beta} = 0$. Поскольку $a\psi_\alpha \sim \psi_{\alpha-1}$, требование неотрицательности $\alpha$ налагает условие (7), т. е. рассматриваемое представление является фоковским. Условие (17) может быть использовано как определение регулярного представления ККС в гильбертовом пространстве.

По определению, условие (17) вводит регулярные представления и в пространстве с индефинитной метрикой. Следующая теорема описывает регулярные представления в пространстве Крейна [13].

**Теорема 3.** *Регулярные представления алгебры Гейзенберга в пространстве Крейна принадлежат одному из трех классов:*

*1. Представления Фока: характеризуются наличием вектора $\psi_0$ (фоковского вектора), такого, что*

$$a\psi_0 = 0.$$

*Оператор числа частиц $N$ имеет полный набор собственных векторов $\psi_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ с неотрицательными собственными значениями.*

*2. Антифоковские представления: характеризуются наличием вектора $\psi_{-1}$ (антифоковского вектора), такого, что*

$$a^+\psi_{-1} = 0.$$

*Оператор числа частиц $N$ имеет полный набор собственных векторов $\psi_n$, $n = -1, -2, \ldots$ с отрицательными собственными значениями.*

*3. $\lambda$-представления: оператор числа частиц $N$ имеет полный набор собственных векторов, таких, что*

$$\operatorname{Sp} N = \lambda + \mathbb{Z}, \quad -1 < \lambda < 0.$$

Фоковские представления в пространстве Крейна реально являются фоковскими представлениями в гильбертовом пространстве. Нас будет интересовать второй, антифоковский случай, в котором

$$a^+\psi_{-1} = 0. \tag{20}$$

Отметим, что в пространстве Крейна не существует собственных нейтральных векторов оператора $N$. Напомним, что в пространстве с индефинитной метрикой нейтральными называются векторы, скалярное произведение которых самого на себя равно нулю. Действительно, нейтральный собственный вектор оператора $N$ должен быть ортогонален всем векторам рассматриваемого пространства, поскольку пространство Крейна натянуто на собственные векторы оператора $N$. Однако в пространстве Крейна не существует таких, отличных от нуля, векторов. Легко видеть, что для набора собственных векторов оператора $N$

$$\psi_{-n} = \frac{a^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}\psi_{-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

выполняется соотношение

$$(\psi_{-n}, \psi_{-n}) = (-1)^{n-1}. \tag{21}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}(\psi_{-n}, \psi_{-n}) &= \frac{1}{n-1}(a\psi_{-n+1}, a\psi_{-n+1}) = \\ &= \frac{1}{n-1}(\psi_{-n+1}, a^{+}a\psi_{-n+1}) = (-1)(\psi_{-n+1}, \psi_{-n+1}) = \\ &\qquad = \ldots = (-1)^{n-1}(\psi_{-1}, \psi_{-1}),\end{aligned}$$

где всегда можно положить $(\psi_{-1}, \psi_{-1}) = 1$.

Покажем, что равенство

$$\{a, J\} = \{a^{+}, J\} = 0, \tag{22}$$

где $\{x, y\} = xy + yx$, выполнено на всех линейных комбинациях векторов $\psi_{-n}$. Пусть $n = 2m$. Так как $a\psi_{-2m} = \psi_{-2m-1}$, из (11) и (21) следует, что

$$Ja\psi_{-2m} = J\psi_{-2m-1} = \psi_{-2m-1}.$$

С другой стороны,

$$aJ\psi_{-2m} = -a\psi_{-2m} = -\psi_{-2m-1}.$$

Случай $n = 2m + 1$ может быть рассмотрен аналогично. Таким образом,

$$\{a, J\}\psi_{-n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Далее, для любого вектора $\psi$, такого, что

$$\psi = \sum_{p=-k}^{-l} c_p\,\psi_p, \quad k, l \in \mathbb{N}, \quad k > l \geqslant 1,$$

следует

$$\{a, J\}\psi = 0. \tag{23}$$

Тем самым равенство $\{a, J\} = 0$ выполнено в плотной области пространства Крейна. Из свойства $J^{+} = J$ следует также справедливость равенства $\{a^{+}, J\} = 0$.

## 3. АНАЛОГ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕЙЛЯ И ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ФОН НЕЙМАНА ДЛЯ СЛУЧАЯ АНТИФОКОВСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Аналог представления Вейля для антифоковского случая был получен в [17].

Пусть $a$ и $a^+$ — операторы антифоковского представления в пространстве Крейна $\mathcal{K}$. Введем новые операторы $b = a^+$ и $b^+ = a$, в терминах которых получим

$$[b, b^+] = -1, \quad \tilde{N} = -N - 1, \quad \mathrm{Sp}\,\tilde{N} = \mathbb{N}, \quad \psi_{-n} = \tilde{\psi}_{n-1}, \tag{24}$$

где «˜» обозначает все величины, относящиеся к новым операторам.

Соотношения (20) и (22) примут вид

$$b\tilde{\psi}_0 = 0, \quad \{b, J\} = \{b^+, J\} = 0. \tag{25}$$

Далее, из (16) получаем

$$b^* = Jb^+J = -b^+. \tag{26}$$

Отметим, что для операторов $b$ и $b^*$ выполнено стандартное коммутационное соотношение вида (5)

$$[b, b^*] = I. \tag{27}$$

С использованием (6) операторы $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$, удовлетворяющие ККС (1), могут быть выражены так:

$$\tilde{P} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(b - b^*), \quad \tilde{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b + b^*). \tag{28}$$

Легко выразить их также через исходные операторы антифоковского представления: с помощью соотношения $b^* = -b^+ = -a$, $b = a^+$ получаем

$$\tilde{P} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(a^+ + a), \quad \tilde{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ - a). \tag{29}$$

$\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ являются самосопряженными операторами, определенными на некоторой области в гильбертовом пространстве. Далее мы можем повторить рассуждения, приведенные в [1] при доказательстве соотношения (3). Таким образом, мы получаем аналог представления ККС в форме Вейля для антифоковского случая.

Наконец, к полученному представлению может быть применена теорема фон Неймана, поскольку унитарные группы операторов $\{U(t) = \mathrm{e}^{it\tilde{P}}\}$ и $\{V(s) = \mathrm{e}^{is\tilde{Q}}\}$ удовлетворяют всем условиям теоремы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теорема единственности фон Неймана, согласно которой любые два неприводимые представления ККС, записанные в форме Вейля, унитарно-эквивалентны, распространена на теории, содержащие нефизические частицы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Putnam C. R.* Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1967.
2. *Эмх Ж.* Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Наука, 1976.
3. *Stone M. H.* On One-Parameter Unitary Groups in Hilbert Space // Ann. Math. 1932. V. 33. P. 643.
4. *Foias C., Geher L. L., Nagy B. Sz.* On the Permutability Condition of Quantum Mechanics // Acta Sec. Math. (Szeged). 1960. V. 21. P. 78.
5. *Вернов Ю. С., Мнацаканова М. Н., Салынский С. Г.* Новое определение регулярности представления алгебры канонических коммутационных соотношений // Вестн. МГУ. Сер. 3. 2010. Т. 6. С. 113.
6. *Rellich F.* Der Eindeutigkeitssatz für die Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen // Nachr. Akad. Wiss. Gött. Math.-Phys. Klasse. 1946. V. 107.
7. *Dixmier J.* Sur la relation $i(PQ - QP) = 1$ // Comp. Math. 1958. V. 13. P. 263.
8. *von Neumann J.* Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren // Math. Ann. 1931. V. 104. P. 570.
9. *Bratteli O., Robinson D. W.* Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics. V. 2. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1979.
10. *Kugo T., Ojima I.* Local Covariant Operator Formalism of Non-Abelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem // Suppl. Prog. Theor. Phys. 1979. V. 66. P. 1.
11. *Morchio G., Strocchi F.* Infrared Singularities, Vacuum Structure and Pure Phases in Local Quantum Field Theory // Ann. Inst. H. Poincaré. 1980. V. 33. P. 251.
12. *Strocchi F.* Selected Topics on the General Properties of Quantum Field Theory. World Sci., 1993.
13. *Mnatsakanova M. et al.* Irreducible Representations of the Heisenberg Algebra in Krein Spaces // J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 2969.
14. *Bognar J.* Indefinite Inner Product Spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1974.
15. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
16. *Krein M. G.* Introduction to the Geometry of Indefinite $J$-Spaces and to the Theory of Operators in Those Spaces // Am. Math. Soc. Transl. 1970. V. 93. P. 103.
17. *Вернов Ю. С., Мнацаканова М. Н., Салынский С. Г.* Аналог вейлевского представления алгебры канонических коммутационных соотношений для случая нефизических частиц // Письма в ЭЧАЯ. 2012. Т. 9, № 3(173). С. 353–358.

Получено 3 сентября 2014 г.