ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2025. Т. 56, вып. 3. С. 1203–1213

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕНОРМГРУППОВОГО ПОТОКА ПОТЕНЦИАЛА ХИГГСА

М. В. Елисов [1,*], *М. В. Долгополов* [2,**]

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
[2] Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

Исследованы критические точки как характеристики асимптотического поведения индуцированных переходов и эволюции поверхности экстремумов эффективных потенциалов Хиггса для оценки ряда характеристик, например, асимптотической устойчивости в случае заданных параметров. Оценены критические явления при эволюции поверхности экстремумов потенциала Хиггса в системе с двумя дублетами комплексных полей. Проведено исследование ренормгрупповых потоков каплингов эффективного потенциала расширения сектора Хиггса Стандартной модели. Определены асимптотическое поведение каплингов и характеристики критических точек, построены графики в фазовых пространствах для каплингов самодействия. Полученные результаты указывают на существование стабильных нетривиальных фиксированных точек, что говорит о симметрии $O(2)$ асимптотически в инфракрасной области. Точка (0,0) оказывается устойчивой, так как теория сводится к фиксированной точке свободного поля скалярной теории. Путем настройки мы можем получить широкий диапазон энергий, в котором неподвижные точки определяют поведение теории.

In this paper, critical points were investigated as characteristics of the asymptotic behavior of induced transitions and the evolution of the surface of the extremes of effective Higgs potentials to evaluate a number of characteristics, for example, asymptotic stability in the case of given parameters. Critical phenomena in the evolution of the surface of the extremes of the Higgs potential in a system with two doublets of complex fields were evaluated. A study of renormalization group flows of couplings of the effective potential of the Higgs sector expansion of the Standard Model has been conducted. The asymptotic behavior of the couplings and the characteristics of the critical points are determined. The materiality of the operators is evaluated. Graphs were constructed in phase spaces for the interaction constants. The obtained results indicate the existence of stable nontrivial fixed volumes, which indicates the symmetry of $O(2)$ asymptotically in the IR case. The point (0,0) turns out to be stable, since the theory reduces to a fixed point of the free field of the scalar theory. By tuning, we can obtain a wide range of energies in which fixed points determine the behavior of the theory.

PACS: 03.70.+k; 64.60.ae

* E-mail: maksimelisov2003@gmail.com
** E-mail: mvdolg@yandex.ru

1. ВВЕДЕНИЕ. УСТОЙЧИВОСТЬ В КТП. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Метод ренормализационной группы в квантовой теории поля используется для исследования непрерывного преобразования лагранжиана путем интегрирования по степеням свободы с большими импульсами и энергиями. При этом зависимость определяется дифференциальными групповыми уравнениями [1, 2]. Решение со стационарной точкой является особенностью уравнений ренормализационной группы (РГ). Существование таких квазификсированных или квазинеподвижных точек означает, что решения уравнений РГ, соответствующие диапазону различных граничных значений фундаментальных параметров в масштабе высоких энергий, сфокусированы в узком интервале в инфракрасной области [3, 4]. Это позволяет получить некоторые предсказания для взаимодействий и физических наблюдаемых в низкоэнергетическом масштабе. Метод ренормгруппы широко используется для анализа КЭД, КХД и возможных расширений Стандартной модели (СМ), начиная с середины XX в. Были введены два способа перенормировок: Вильсона и Боголюбова. Ренормгрупповая техника используется в теории электрослабых взаимодействий и фазовых переходов, допускающих спонтанное нарушение симметрии. Ренормгрупповые свойства потенциала Хиггса в различных моделях теории поля достаточно хорошо известны в литературе, начиная с 1980-х гг. [3]. Новые работы связаны с анализом улучшенного температурного эффективного потенциала [5], определением сценариев исследования бозонов Хиггса в условиях экспериментальных ограничений на параметры моделей расширения сектора Хиггса [6], с индуцированным спонтанным нарушением симметрии [5, 7–9], с проблемой темной материи в рамках температурных расширений СМ [10]. И вычисление, и визуализация ренормгруппового потока вблизи фиксированных точек скалярных полей являются методами исследований в данной области.

В нашей работе выделим следующие задачи: 1) исследовать ренормгрупповое уравнение для модели с двумя скалярными полями; 2) составить график ренормгрупповых потоков каплингов для модели с двумя скалярными полями; 3) оценить критические явления при эволюции поверхности минимумов потенциала Хиггса в системе с двумя дублетами полей.

2. ОБЩИЙ ВИД ПОТЕНЦИАЛА

Один из возможных потенциалов, допускающих спонтанное нарушение симметрии с полями ϕ_1, ϕ_2, имеет вид

$$\begin{aligned} U(\phi_1,\phi_2) = {} & -\mu_1^2(\phi_1^\dagger\phi_1) - \mu_2^2(\phi_2^\dagger\phi_2) - \mu_{12}^2(\phi_1^\dagger\phi_2) - \overset{*}{\mu}{}_{12}^2(\phi_2^\dagger\phi_1) + \\ & + \frac{\lambda_1}{2}(\phi_1^\dagger\phi_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2}(\phi_2^\dagger\phi_2)^2 + \lambda_3(\phi_1^\dagger\phi_1)(\phi_2^\dagger\phi_2) + \lambda_4(\phi_1^\dagger\phi_2)(\phi_2^\dagger\phi_1) + \\ & + \lambda_5((\phi_1^\dagger\phi_2)(\phi_1^\dagger\phi_2) + (\phi_2^\dagger\phi_1)(\phi_2^\dagger\phi_1)). \end{aligned}$$

В первом случае рассмотрим $\mu_{12} = \mu_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, где ϕ_1, ϕ_2 — скалярные поля. Во втором случае: ϕ_1, ϕ_2 — дублеты, $\lambda_5 = 0$. И в дальнейшем добавим λ_5 в качестве свободного параметра.

3. МОДЕЛЬ С ДВУМЯ ПОЛЯМИ

Вначале рассмотрим лагранжиан взаимодействия с двумя скалярными полями ϕ_1 и ϕ_2, при этом тут два каплинга [1, 2]:

$$L = \frac{1}{2}((\partial_\mu \phi_1)^2 + (\partial_\mu \phi_2)^2) - \frac{\lambda}{4!}(\phi_1^4 + \phi_2^4) - \frac{2\rho}{4!}\phi_1^2\phi_2^2. \tag{1}$$

Из данного лагранжиана определяются правила Фейнмана и необходимые диаграммы. Вычислим β-функции для связей λ и ρ. Для этого нам потребуются контрчлены перенормировки δ_λ и δ_ρ. В однопетлевом приближении мы можем найти δ_λ, вычислив

$$\begin{aligned} &-i\lambda + (-i\lambda)^2\left[V(t) + V(s) + V(u)\right] + \\ &\qquad + \left(-i\frac{\rho}{3}\right)^2\left[V(t) + V(s) + V(u)\right] - i\delta_\lambda = \\ &\qquad\qquad = -i\lambda + \left(\lambda^2 + \frac{\rho^2}{9}\right)\left[V(t) + V(s) + V(u)\right] - i\delta_\lambda. \end{aligned}$$

Каждая однопетлевая диаграмма, которую мы будем рассматривать, дает один и тот же петлевой интеграл $V(k)$. Используя фактор симметрии 1/2 и результаты размерной регуляризации, вычислим расходящуюся часть $V(k)$:

$$\begin{aligned} V(k) &= \frac{1}{2}\int \frac{d^dk}{(4\pi)^d}\frac{i}{(k^2 + i\epsilon)}\frac{i}{((p-k) + i\epsilon)} = -\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int \frac{d^dl}{(4\pi)^d}\frac{1}{(l^2 - \Lambda)^2} = \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 dx \frac{i}{(4\pi)^d/2}\frac{\Gamma(2 - d/2)}{\Lambda^{2-d/2}} \sim_{d\to 4} -\frac{i}{32\pi^2}\frac{2}{\epsilon} \to -\frac{i}{32\pi^2}\log\frac{\Lambda^2}{M^2}. \end{aligned}$$

Применяя условия перенормировки, получаем

$$i\delta_\lambda = \frac{3}{32\pi^2}[\lambda^2 + (\rho/3)^2]\log\frac{\Lambda^2}{M^2},$$

$$\beta_\lambda = \frac{3}{16\pi^2}[\lambda^2 + (\rho/3)^2].$$

При этом M — масштаб перенормировок, Λ — некоторая очень большая масса (параметр обрезания). Такая замена не оказывает никакого влияния на интеграл в области малых k (так как Λ велика), однако теперь при $k > \Lambda$ интеграл мягко обрезается при условии вычитания расходящейся части; для расчета расходящейся части интегралов в данном контексте достаточно использовать схему с обрезанием Λ. Чтобы найти β_ρ, мы должны вычислить контрчлен перенормировки δ_ρ. В однопетлевом порядке найдем δ_ρ, вычислив необходимый ряд диаграмм.

Петлевой интеграл для каждой из диаграмм будет вносить $2V(k)$ в общую амплитуду $i\mathcal{M}$. Тогда

$$i\mathcal{M} = -i(\rho/3) + (-i\lambda)(-i\rho/3)[2V(t)] + (-i\rho/3)^2[2V(u) + 2V(s)] - i\delta_\rho/3.$$

При этом $i\delta_\rho/3 = (-i\lambda)(-i\rho/3)[2V(t)] + (-i\rho/3)^2[2V(u) + 2V(s)] =$
$= -\lambda\rho/3\dfrac{-i}{16\pi^2}\log\dfrac{\Lambda^2}{M^2} - (\rho/3)^2\dfrac{-i}{16\pi^2}\log\dfrac{\Lambda^2}{M^2}$,

$$\delta_\rho = \frac{1}{16\pi^2}[\lambda\rho + 2\rho^2/3]\log\frac{\Lambda^2}{M^2}.$$

Поскольку в данной теории нет расходящихся диаграмм собственной энергии до однопетлевого порядка, β-функция для ρ определяется в точности удвоенным коэффициентом логарифмической расходимости по δ_ρ:

$$\beta_\rho = \frac{1}{8\pi^2}[\lambda\rho + 2\rho^2/3].$$

Уравнение Каллана–Симанчика для двухточечной функции

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + 2\gamma(\lambda)\right]G^{(2)}(p) = 0.$$

И записав его для наших параметров ($\gamma(\lambda) = 0$), получим уравнение ренормгруппы:

$$\beta_{\lambda/\rho} = \frac{1}{\rho^2}[\beta_\lambda\rho - \beta_\rho\lambda] = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{3\lambda^2\rho}{16\pi^2} + \frac{\rho^3}{48\pi^2} - \frac{\lambda^2\rho}{8\pi^2} - \frac{\rho^2\lambda}{12\pi^2}\right] =$$
$$= \frac{(\lambda/\rho)^2\rho}{16\pi^2} + \frac{\rho}{48\pi^2} - \frac{\lambda/\rho}{12\pi^2} = \frac{\rho}{48\pi^2}[3(\lambda/\rho)^2 - 4\lambda/\rho - 1],$$

$$\beta_{\lambda/\rho} = \frac{\rho}{48\pi^2}(3\lambda/\rho - 1)(\lambda/\rho - 1).$$

Выражение $\beta_{\lambda/\rho}$ имеет два корня при $\lambda/\rho = 1$, а поскольку вторая производная $\beta_{\lambda/\rho} = 6 > 0$, то для $\lambda/\rho \in (1/3, 1)$ мы знаем, что $\beta_{\lambda/\rho} < 0$, и для $\lambda/\rho > 1$ получаем $\beta_{\lambda/\rho} > 0$. Поэтому на больших масштабах связи будут изменяться как в пределе $\lambda = \rho$. Этому соответствует непрерывная симметрия $O(2)$. Чтобы убедиться в этом, определим $\phi \equiv \begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2\end{pmatrix}$. В этих обозначениях лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4.$$

Данный лагранжиан явно инвариантен к $O(2)$-преобразованиям, которые соответствуют изменению фазы ϕ.

Теперь выведем уравнение перенормировки для ρ/λ:

$$M\frac{d}{dM}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\beta_\rho - \frac{\rho}{\lambda^2}\beta_\lambda = \frac{\rho}{3(4\pi)^2}\left[-\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2 + 4\,\frac{\rho}{\lambda} - 3\right]. \qquad (2)$$

Тогда легко видеть, что $\rho/\lambda = 1$ — ИК-неподвижная точка.

В $4-\epsilon$ измерениях β-функции для ρ и λ сдвигаются как

$$\beta_\lambda = -\epsilon\lambda + \frac{3\lambda^2 + \rho^2/3}{(4\pi)^2}, \quad \beta_\rho = -\epsilon\rho + \frac{2\lambda\rho + 4\rho^2/3}{(4\pi)^2}. \qquad (3)$$

Но легко показать, что члены, содержащие ϵ, сокращаются в функции β для ρ/λ. Это верно, потому что ρ/λ все еще остается безразмерным в $4-\epsilon$ измерениях. Следовательно, существуют три фиксированные точки потока РГ для ρ/λ при 0, 1 и 3. Мы проиллюстрируем это диаграммой потока РГ в плоскости $\rho-\lambda$ с отклонением размерности $\epsilon = 0{,}01$ на рис. 1.

Три нетривиальные неподвижные точки на рис. 1 показаны синим. Они получены из нулей β-функции. Также анализ их устойчивости дает

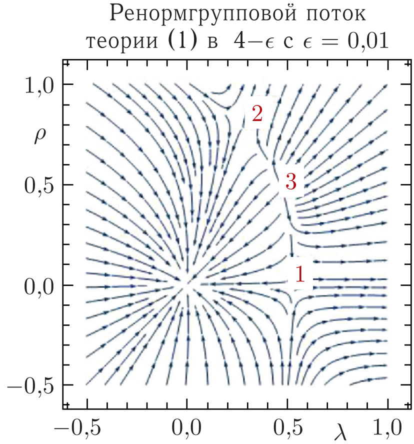

Рис. 1 (цветной в электронной версии). Ренормгрупповой поток модели с двумя скалярными полями

нам возможность определить тип особых точек:

$$\lambda_1 = \frac{16\pi^2}{3}\,\epsilon, \quad \rho_1 = 0, \quad \text{точка 1 — седло, рис. 2,} \tag{4}$$

$$\lambda_2 = \frac{8\pi^2}{3}\,\epsilon, \quad \rho_2 = 8\pi^2\epsilon, \quad \text{точка 2 — седло, рис. 3,} \tag{5}$$

$$\lambda_3 = \frac{24\pi^2}{5}\,\epsilon, \quad \rho_3 = \frac{24\pi^2}{5}\,\epsilon, \quad \begin{array}{l}\text{точка 3 является УФ}\\ \text{нестабильным узлом, рис. 4.}\end{array} \tag{6}$$

В отличие от этих трех точек (1, 2 и 3), четвертая точка (0,0) является ИК стабильной [11, 12]. В ней находится фиксированная точка свободного поля скалярной теории, которая устойчива. На фазовой диаграмме это вырожденный устойчивый узел, рис. 5 ($\lambda_4 = \rho_4 = 0$). Графики построены в фазовом пространстве, оси в условных единицах.

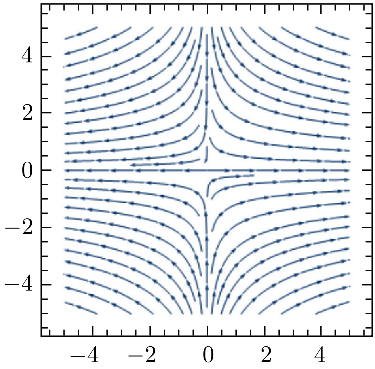

Рис. 2. Седло

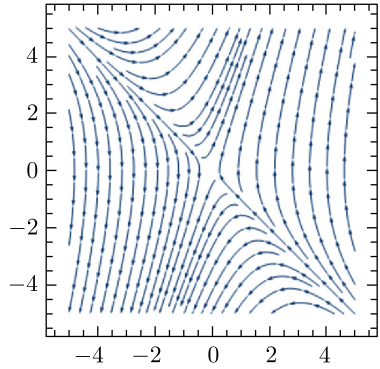

Рис. 3. Седло

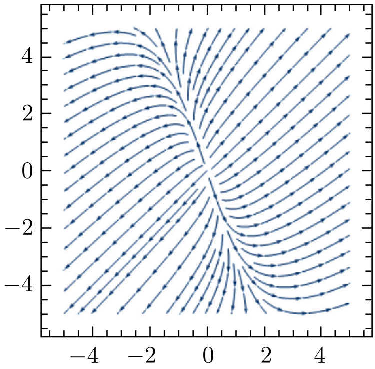

Рис. 4. Неустойчивый узел

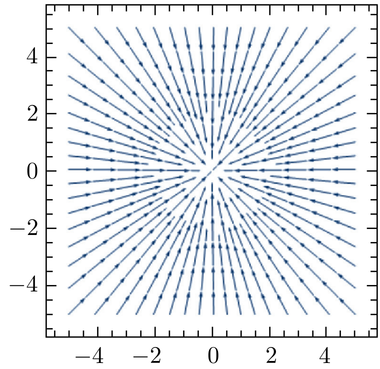

Рис. 5. Устойчивый узел

Получение типа особых точек было проведено путем нахождения якобиана, линеаризации и нахождения собственных значений линеаризованной системы. При этом мы имеем право использовать линеаризацию, применяя теорему о линеаризации, так как наши особые точки простые [13].

Мы получаем возникающую симметрию $O(2)$ асимптотически в ИК-случае, если мы начинаем с соответствующего диапазона параметров. Путем настройки мы можем получить широкий диапазон значений энергии, в котором неподвижные точки 1 или 2 определяют поведение теории. В этом пространстве связей существуют и другие классы универсальности, которые мы не можем исследовать с помощью ϵ-методов расширения, поскольку они лежат в режиме сильной связи теории.

4. ДВУХДУБЛЕТНАЯ МОДЕЛЬ

В общей двухдублетной модели (ДДМ) вводится система полей [14, 15] с возможностью нарушения CP-инвариантности путем введения фаз, соответствующих эффективным явному и спонтанному нарушению CP-инвариантности (см. обсуждение в [15] и ссылки):

$$\begin{gathered}\phi_1 = \begin{pmatrix} -i\omega_1^+ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(v_1 + \nu_1 + i\chi_1) \end{pmatrix}, \\ \phi_2 = \mathrm{e}^{i\xi} \begin{pmatrix} -i\omega_2^+ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(v_2\,\mathrm{e}^{i\zeta} + \nu_2 + i\chi_2) \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\langle\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \langle\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2\,\mathrm{e}^{i(\zeta+\xi)} \end{pmatrix}, \\ v^2 = v_1^2 + v_2^2 = 246^2\ \text{ГэВ}^2.\end{gathered} \tag{8}$$

Специальным случаем двухдублетного потенциала является эффективный потенциал хиггсовского сектора минимальной суперсимметричной стандартной модели (МССМ). В низшем (древесном) приближении на масштабе энергии нарушения суперсимметрии M_{SUSY} (т. е. при энергиях порядка масс суперчастиц) параметры $\lambda_{1,\ldots,5}$ действительные и выражаются при помощи констант g_1 и g_2 электрослабой группы калибровочной симметрии $SU(2)\times U(1)$ следующим образом:

$$\lambda_1(M_{\mathrm{SUSY}}) = \lambda_2(M_{\mathrm{SUSY}}) = \frac{1}{4}(g_2^2(M_{\mathrm{SUSY}}) + g_1^2(M_{\mathrm{SUSY}})),$$

$$\lambda_3(M_{\mathrm{SUSY}}) = \frac{1}{4}(g_2^2(M_{\mathrm{SUSY}}) - g_1^2(M_{\mathrm{SUSY}})),$$

$$\lambda_4(M_{\mathrm{SUSY}}) = -\frac{1}{2}g_2^2(M_{\mathrm{SUSY}}), \tag{9}$$

$$\lambda_5(M_{\mathrm{SUSY}}) = 0, \quad g_1 = 0{,}3573, \quad g_2 = 0{,}6517.$$

Такие расширенные потенциалы Хиггса исследовались и ранее в рамках минимальной суперсимметричной модели [16–18], но не были построены ренормгрупповые потоки.

В численных расчетах ренормгруппового потока потенциала Хиггса двухдублетной модели используются аналитические выражения на основе работ авторов [15], при этом проводится калибровка с результатами в пределе соответствия с работой [4] и методиками ренормгруппового исследования в [2, 19]. В части анализа температурного расширения потенциала Хиггса ДДМ модели использовались формулы работ [16, 20–22].

Рассмотрена задача по нахождению ренормгруппового потока для каплингов интенсивностей связи. Отметим, что поведение первых двух каплингов (рис. 6) представляется симметричным, что обосновано выполнением симметрий для эффективного потенциала. Для случая третьего и четвертого каплингов (рис. 7) наблюдается смещение, что связано с наличием дополнительной фазы и может быть рассмотрено подробнее для случая комплексных аргументов в выражениях для констант взаимодействия, что представляется актуальным при определении инфракрасного асимптотического поведения критической точки. Потоки для каплингов интенсивности связей на рис. 6 и 7 построены при остальных каплингах, определяемых из граничных условий на масштабе нарушения суперсимметрии в МССМ, с целью приближенной качественной оценки.

Теперь добавим $\lambda_5 \neq 0$ в качестве свободного параметра для анализа поведения системы. На рис. 8 можем наблюдать изменение положения фиксированной УФ-точки системы. При этом, поскольку физическими являются лишь состояния с $\lambda_{1,2} > 0$, мы видим на рис. 9, что при поло-

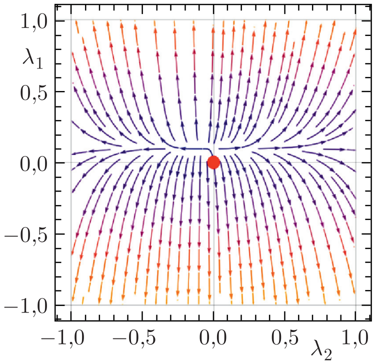

Рис. 6. Поток $U(\phi_1, \phi_2)$ от λ_1 и λ_2

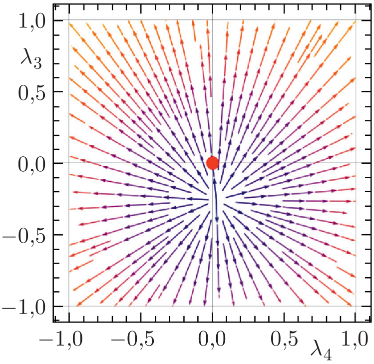

Рис. 7. Поток $U(\phi_1, \phi_2)$ от λ_3 и λ_4

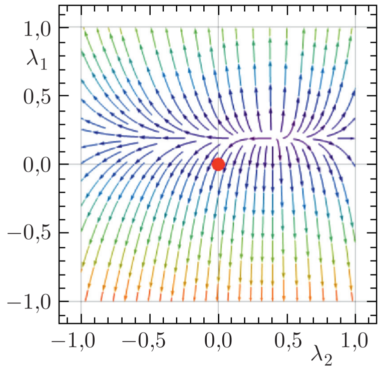

Рис. 8. РГ-поток $U(\phi_1, \phi_2)$ от λ_1 и λ_2, $\lambda_5 = -0{,}175$

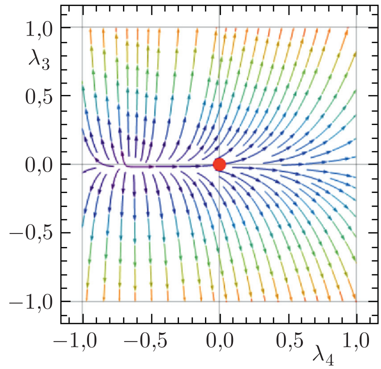

Рис. 9. РГ-поток $U(\phi_1, \phi_2)$ от λ_3 и λ_4, $\lambda_5 = 0{,}055$

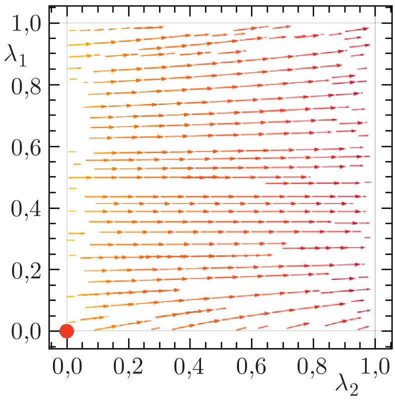

Рис. 10. Поток $U(\phi_1, \phi_2)$ от λ_1 и λ_2

жительном λ_5 исчезает особая точка в физической области. На рис. 10 представлено поведение относительно первых двух каплингов, оно имеет линейную направленность вдоль оси.

ВЫВОДЫ

Получены и исследованы условия для РГ (ренормгруппового потока) для моделей с двумя скалярными полями. Для ряда каплингов наблюдается смещение РГ-потоков, что связано с наличием дополнительной фазы. Определено инфракрасное асимптотическое поведение критической точки. Исследованы критические точки как характеристики асимптотического поведения, индуцированных переходов и эволюции поверхности экстремумов эффективных потенциалов Хиггса для оценки ряда характеристик теории, например, асимптотической устойчивости в случае заданных параметров. Для этого были оценены критические (ИК) явления при эволюции поверхности экстремумов потенциала Хиггса в системе с двумя дублетами. Проведено исследование РГ-потоков для интенсивностей самодействия — каплингов расширения сектора Хиггса СМ. В результате исследования определены возможности оценки РГ-потоков каплингов интенсивности связей расширенной модели, асимптотическое поведение и характеристики критических точек. Построены графики в фазовых пространствах для констант взаимодействия. Полученные результаты указывают на существование стабильных нетривиальных фиксированных точек, что говорит о симметрии $O(2)$ асимптотически в ИК-случае. Также точка (0,0) оказывается устойчивой, так как теория сводится к фиксированной точке свободного поля скалярной теории. Путем настройки мы можем получить широкий диапазон значений энергии, в котором неподвижные точки определяют поведение теории.

Дальнейшая перспектива связана с интерфейсом РГ-потоков для индуцированных переходов и сравнением с экспериментальными данными по самодействию при энергиях СМ и самодействием при больших энергиях для обоснования барионной асимметрии, анализа индуцированного спонтанного нарушения симметрии, сценариев бариогенезиса, анализа температуры, выхода за рамки минимального суперсимметричного расширения.

Благодарности. Авторы выражают благодарность оргкомитету сессии секции ядерной физики ОФН РАН за возможность обсуждения темы исследования и детальные дискуссии. М. В. Елисов выражает благодарность Фонду развития теоретической физики и математики «Базис» за поддержку исследований.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что не имеют каких-либо конфликтов интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. 4-е изд. М.: Наука, 1984.
2. *Пескин М., Шредер Д.* Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
3. *Hill C. T., Leung C. N., Rao S.* Renormalization Group Fixed Points and the Higgs Boson Spectrum // Nucl. Phys. B. 1985. V. 262. P. 517–537.
4. *Froggatt C. D., Nevzorov R., Nielsen H. B., Thompson D.* Fixed Point Scenario in the Two Higgs Doublet Model Inspired by Degenerate Vacua // Phys. Lett. B. 2007. V. 657. P. 95–102.
5. *Funakubo K., Senaha E.* Refined Renormalization Group Improvement for Thermally Resummed Effective Potential // Phys. Rev. D. 2024. V. 109. P. 056023.

6. *Dubinin M. N., Petrova E. Y.* Heavy Supersymmetry with $M_H = 125$ GeV in the Effective Field Theory Approach // Phys. Part. Nucl. 2017. V. 48, No. 5. P. 815–818.
7. *Aoki M., Komatsu T., Shibuya H.* Possibility of a Multi-Step Electroweak Phase Transition in the Two-Higgs Doublet Models // Prog. Theor. Exp. Phys. 2022. V. 2022, No. 6. P. 063B05; https://academic.oup.com/ptep/article-pdf/2022/6/063B05/44062728/ptac068.pdf.
8. *Boos E.* Induced Spontaneous Symmetry Breaking Chain // Europhys. Lett. 2021. V. 136, No. 2. P. 21003.
9. *Dolgopolov M. V., Elisov M. V.* Step-Induced Electroweak Phase Transition // Proc. Fund. Appl. Probl. Mod. Phys. 2023. Sec. I. P. 120.
10. *Arcadi G., Djouadi A., Raidal M.* Dark Matter through the Higgs Portal // Phys. Rep. 2020. V. 842. P. 1–180; arXiv:1903.03616.
11. *Yeghiyan G. K., Jurcisin M., Kazakov D. I.* Infrared Quasi-Fixed Points and Mass Predictions in the MSSM // Mod. Phys. Lett. A. 1999. V. 14, No. 08–09. P. 601–619.
12. *Codoban S., Jurcisin M., Kazakov D.* Higgs Mass Prediction with Non-Universal Soft Supersymmetry Breaking in MSSM // Phys. Lett. B. 2000. V. 477, No. 1–3. P. 223–232; arXiv:9912504.
13. *Молевич Н. Е.* Нелинейная динамика: Учеб. пособие. Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007.
14. *Akhmetzyanova E. N., Dolgopolov M. V., Dubinin M. N.* Higgs Bosons in the Two-Doublet Model with CP Violation // Phys. Rev. D. 2005. V. 71, No. 7. P. 075008.
15. *Ахметзянова Э. Н., Долгополов М. В., Дубинин М. Н.*. Нарушение CP-инвариантности в двухдублетном секторе МССМ // ЭЧАЯ. 2006. Т. 37, № 5. С. 1285–1382.
16. *Dolgopolov M., Dubinin M., Rykova E.* Threshold Corrections to the MSSM Finite-Temperature Higgs Potential // J. Mod. Phys. 2011. V. 2, No. 5. P. 301–322.
17. *Allakhverdieva A. E., Dolgopolov M. V., Rykova E. N.* Restrictions on Parameters of Minimal Supersymmetric Standard Model // J. Math. Sci. 2022. V. 264, No. 6. P. 672–683.
18. *Долгополов М. В., Рыкова Э. Н.* Проявление сценариев бариогенезиса и фазовых переходов в моделях с расширенным скалярным сектором // Физика атомного ядра и элементарных частиц: матер. XLI и XLII зимних шк. СПб., 2008. С. 158–197.
19. *Ахметзянова Э. Н., Долгополов М. В.* Теория перенормировок. Ч. 1. Самара: Самар. гос. ун-т, 2003.
20. *Долгополов М. В., Дубинин М. Н., Рыкова Э. Н.* Критические параметры температурной эволюции двухдублетного потенциала МССМ // ЯФ. 2010. Т. 73, № 6. С. 1069–1073.
21. *Борисов А. О., Долгополов М. В., Дубинин М. Н., Рыкова Э. Н.* Аналитические выражения для пороговых поправок к температурному потенциалу Хиггса МССМ // ЯФ. 2009. Т. 72, № 1. С. 175–180.
22. *Борисов А. О., Долгополов М. В.* Однопетлевые поправки перенормировки поля в скалярном секторе МССМ // ЯФ. 2010. Т. 73, № 6. С. 1130–1133.