

ФОРМИРОВАНИЕ СОЛИТОННОЙ ПЕНЫ В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

Б. С. Мурыгин *, *В. В. Никулин* **, *А. А. Кириллов* ***

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва

Рассмотрено образование составных солитонов в ранней Вселенной. Показано, что при реалистичных начальных условиях, возникающих на инфляционной стадии, эволюция поля приводит к образованию «солитонной пены», состоящей из замкнутых доменных стенок, доменных стенок, ограниченных струнами, и излучения скалярного поля. В результате эволюции «солитонной пены» излучается большое количество частиц скалярного поля, которые могут быть интерпретированы как WIMP, составляющие часть скрытой массы Вселенной.

The formation of composite solitons in the early Universe is considered. It is shown that under realistic initial conditions arising at the inflationary stage, the evolution of the field leads to the formation of a “soliton foam” consisting of closed domain walls, domain walls limited by strings and scalar field radiation. As a result of the “soliton foam” evolution, a large number of scalar field particles are emitted, which can be interpreted as WIMPs constituting a fraction of dark matter of the Universe.

PACS: 03.50.-z; 11.27.+d; 98.80.Cq

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос образования топологических дефектов в ранней Вселенной обсуждается в публикациях с 1970-х гг. [1, 2]. Формирование струн и доменных стенок может являться результатом спонтанного нарушения симметрии, которое приводит к возникновению «солитонной сети», заполняющей всю Вселенную. Такая сеть долгое время рассматривалась как возможный источник крупномасштабной структуры Вселенной [3–6], а также предлагалась в качестве кандидата на роль темной энергии [7]. Однако данные наблюдений сильно ограничивают пространство параметров полевых моделей, предсказывающих образование солитонов [8, 9]. Так, фактически исключается возможность существования сети доменных стенок. В то же время сеть струн остается жизнеспособной моделью [10, 11].

* E-mail: MuryginBS@gmail.com

** E-mail: VVNikulin@mephi.ru

*** E-mail: AAKirillov@mephi.ru

Однако при рассмотрении инфляционного механизма образования солитонов [12, 13, 32] как минимум часть существующих ограничений можно пересмотреть. Обычно солитонная сеть рассматривается как результат теплового фазового перехода, происходящего по всей Вселенной и обусловленного возникновением нетривиального вакуума в эффективном потенциале поля $V_{\text{eff}}(T)$ при понижении температуры T . С другой стороны, солитоны могут образовываться во Вселенной локально в изолированных кластерах, а не в виде глобальной сети. Последнее возможно, если их производство является результатом множественных квантовых флуктуаций, возникающих в скалярном поле во время инфляции. Этот процесс, в свою очередь, может привести к появлению первичных черных дыр (ПЧД) в ранней Вселенной, например, в результате коллапса замкнутых космических струн [14–16] или замкнутых доменных стенок [13, 17].

В данной работе мы рассматриваем образование солитонных структур в результате квантовых флуктуаций, возникающих на стадии инфляционного расширения Вселенной.

1. ПОЛЕВАЯ МОДЕЛЬ

В данной работе исследуется формирование солитонных структур в скалярном поле сразу после окончания эпохи инфляции. Рассмотрим полевую модель с двумя скалярными полями, действие которой имеет вид

$$S = \int \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \mathcal{V}(\phi, \chi) \right] d^4x, \quad (1)$$

где взят потенциал $\mathcal{V}(\phi, \chi)$ достаточно общего вида, который имеет хотя бы один пик и одну седловую точку. В работах [18–20] показано, что в этом случае в полевой модели возможно образование струн и доменных стенок. Для определенности выберем следующую форму потенциала:

$$\mathcal{V}(\phi, \chi) = \frac{m^2}{2}(\phi^2 + \chi^2) + \Lambda^4 \exp\left(-\frac{(\phi - \phi_0)^2 + (\chi - \chi_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2)$$

где (ϕ_0, χ_0) — координаты локального пика, параметры Λ и σ отвечают за его высоту и ширину, а величину m можно интерпретировать как массовый член. Таким образом, моделируемые в данной работе уравнения движения скалярных полей следующие:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2\phi}{a^2} &= -m^2\phi + \frac{\Lambda^4}{\sigma^2}(\phi - \phi_0) \exp\left[-\frac{(\phi - \phi_0)^2 + (\chi - \chi_0)^2}{2\sigma^2}\right], \\ \ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \frac{\nabla^2\chi}{a^2} &= -m^2\chi + \frac{\Lambda^4}{\sigma^2}(\chi - \chi_0) \exp\left[-\frac{(\phi - \phi_0)^2 + (\chi - \chi_0)^2}{2\sigma^2}\right], \end{aligned} \quad (3)$$

где a , H — масштабный фактор и параметр Хаббла соответственно. Последние зависят от времени и определяются моделируемой стадией эволюции Вселенной.

Процесс образования и полевой эволюции солитонов в рассматриваемой модели происходит на стадии первичного разогрева после инфляции и будет подробно разобран в следующем разделе. При этом начальные распределения полей генерируются на стадии инфляции. Инфляционные начальные распределения определяются множественными квантовыми флуктуациями полей (ϕ, χ) , возникающими во время космологической инфляции, и статистически могут быть описаны как случайные гауссовы поля [21, 22]. В настоящей работе рассматриваются субинфляционные скалярные поля (удовлетворяющие $\mathcal{V}''(\phi, \chi) \ll H_{\text{inf}}^2$).

Пример моделирования начальных распределений полей со спектром мощности $\mathcal{P}(k)$, характерным для инфляционных флуктуаций, показан на рис. 1. Поля $\phi(\mathbf{x})$, $\chi(\mathbf{x})$ остаются в этом состоянии до тех пор, пока не «разморозятся» после выхода со стадии космологической инфляции (при $H^2(t) \lesssim \mathcal{V}''(\phi, \chi)$). Этот момент определяет начало классической эволюции скалярных полей, в результате которой могут образоваться солитонные структуры.

Для численного моделирования сценариев эволюции скалярных полей использовался явный метод конечных разностей. Моделирование про-

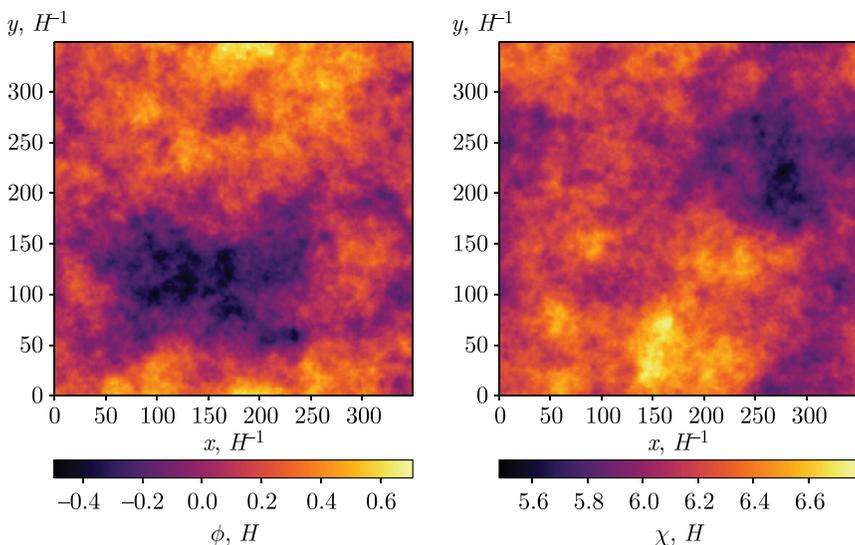


Рис. 1. Пример начальных условий для скалярных полей $\phi(\mathbf{x})$, $\chi(\mathbf{x})$, возникающих в результате квантовых флуктуаций на стадии инфляции (проиллюстрирован xy -срез). Размер моделирования $L^3 = 350^3 H_{\text{inf}}^{-1}$, начальные значения $\phi_{\text{in}} = 0$, $\chi_{\text{in}} = 6$, спектр мощности $\mathcal{P}(k) \approx k^{-3}$ [23]

водилось на графических процессорах Nvidia GPU с использованием библиотек numPy, Cython и Cython для работы с линейной алгеброй в Python и Nvidia CUDA. Значения полей задавались на кубической сетке размером L^3 в трех последовательных временных слоях. Пространственный шаг сетки был выбран $\Delta x = 1$ в единицах H_{inf}^{-1} , а временной шаг подбирался так, чтобы $\Delta t \approx 1/2$, в соответствии с условием Куранта, обеспечивающим численную устойчивость решений. Для дискретизации уравнений (3) использовалась явная разностная схема с точностью $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$.

2. ФОРМИРОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ СТРУКТУР

В результате эволюции инфляционных начальных условий образуется солитонная структура, подобная пене. Структура этой пены существенно зависит от начальных условий. В каких-то областях пространства образуется плотная пена, состоящая из соединенных доменных стенок с возможными дырками, ограниченными струнами. В других областях пространства образуется более разреженная пена, состоящая в основном из отдельных замкнутых доменных стенок (пузырей). Механизмы образования отдельных доменных стенок и струн для потенциала (2) обсуждаются в работе [20].

Конкретная структура пены зависит от сценария, по которому проходит постинфляционная эволюция полей. Возможные сценарии схематически показаны на рис. 2. Рис. 2, а иллюстрирует самый простой сценарий: начальное значение поля во Вселенной $\Phi_{\text{univ}}^{\text{in}} \equiv (\phi^{\text{univ}}, \chi^{\text{univ}})$ в результате инфляционных флуктуаций переходит в $\Phi_{\text{vac}}^{\text{in}}$. Далее поле скатывается в вакуум, высвобождая энергию в виде излучения (когерентных колебаний) скалярного поля. В этом случае солитоны не образуются.

На рис. 2, б показан сценарий формирования разреженной пены, состоящей из отдельных замкнутых доменных стенок: в результате инфляционных флуктуаций в некоторой области пространства поле принимает значение $\Phi_{\text{bubble}}^{\text{in}}$. Из этой точки возможно одновременное скатывание поля по обе стороны от пика с зацеплением за него. Однако вероятность такого события невелика, и более вероятно, что произойдет простое скатывание с одной стороны пика. Таким образом, возникает разреженная пена из замкнутых доменных стенок (результаты ее моделирования представлены на рис. 3).

Наконец, на рис. 2, в показан сценарий, в котором образуется плотная пена из соединенных доменных стенок с дырками, ограниченными струнами. В отличие от предыдущего случая в результате инфляции полевая конфигурация оказывается ближе к пику — вероятность образования солитонов повышается. В такой конфигурации возникает множество соединенных доменных стенок (результаты ее моделирования показаны на рис. 4). Также уникальность вакуума в потенциале (2) делает возможным образование дырок в доменных стенках, ограниченных струнами.

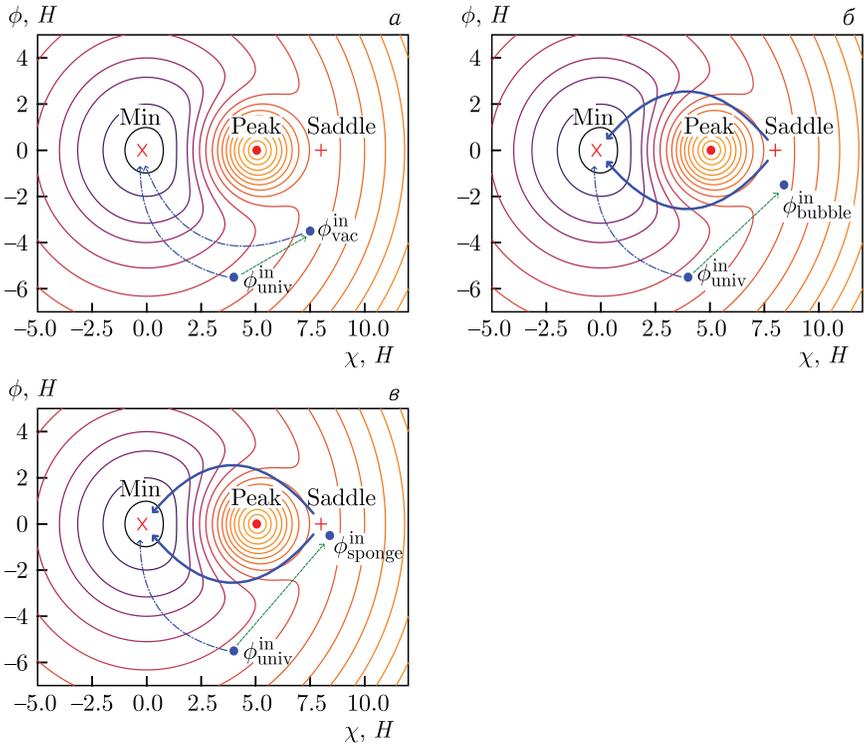


Рис. 2 (цветной в электронной версии). Схематическое представление эволюции различных начальных значений скалярного поля $\Phi_{\text{univ}}^{\text{in}}$: а) сценарий прямого скапывания скалярного поля в вакуум с производством когерентных осцилляций (излучения); б) сценарий формирования разреженной солитонной пены, состоящей из замкнутых доменных стенок (пузырей); в) сценарий формирования плотной солитонной пены, состоящей из соединенных доменных стенок и струн. Линиями уровня показан потенциал поля. Синими стрелками обозначена классическая эволюция полей, зелеными стрелками — инфляционные квантовые флуктуации

Перечисленные три сценария выделены отдельно для наглядности. Однако близкие области пространства также должны иметь близкие начальные значения полей, поскольку между ними во время инфляции устанавливаются пространственные корреляции, описываемые спектром мощности $\mathcal{P}(k)$. Поскольку непрерывное перемещение в физическом пространстве соответствует такому же непрерывному перемещению в пространстве полей, четкой границы между сценариями с разными начальными значениями полей нет. Один сценарий эволюции может переходить в другие в соседних областях физического пространства.

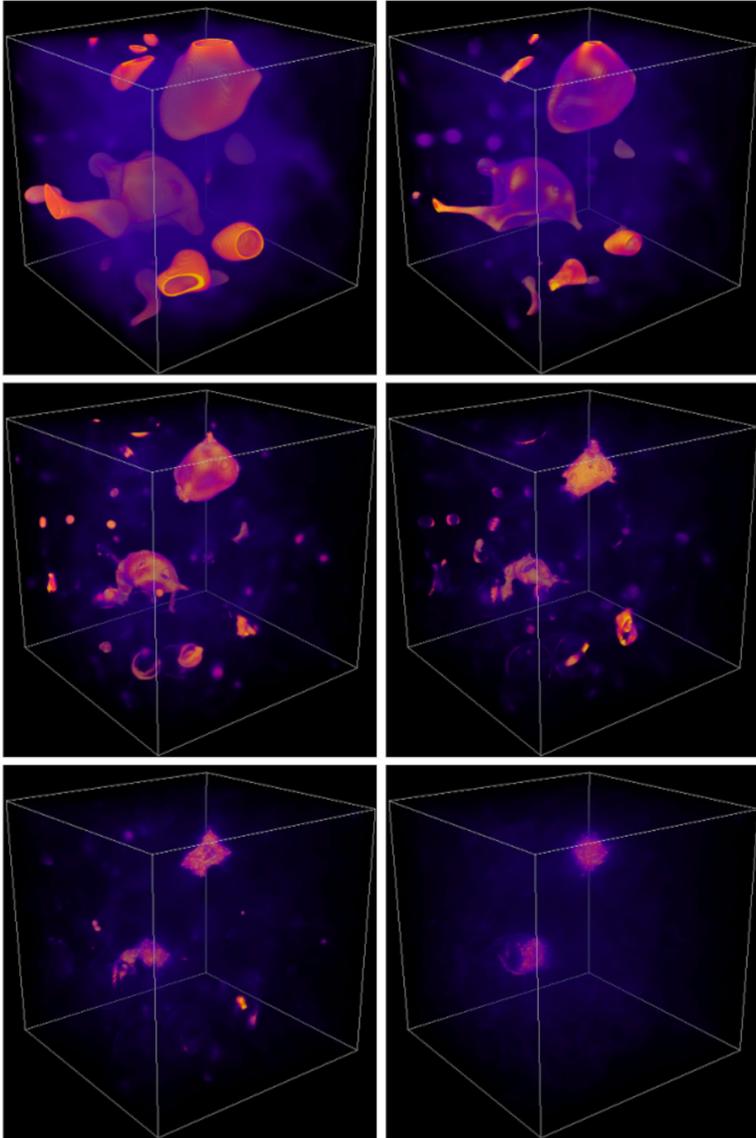


Рис. 3 (цветной в электронной версии). Эволюция разреженного кластера замкнутых доменных стенок (пузырей), образованного из инфляционных начальных условий. Цветом показано распределение плотности энергии полей в трехмерном пространстве (теплые цвета соответствуют более высоким плотностям энергии). Размер моделирования $L^3 = 900^3 H_{\text{inf}}^{-1}$, временной промежуток между кадрами $\Delta t \approx 100 H_{\text{inf}}^{-1}$

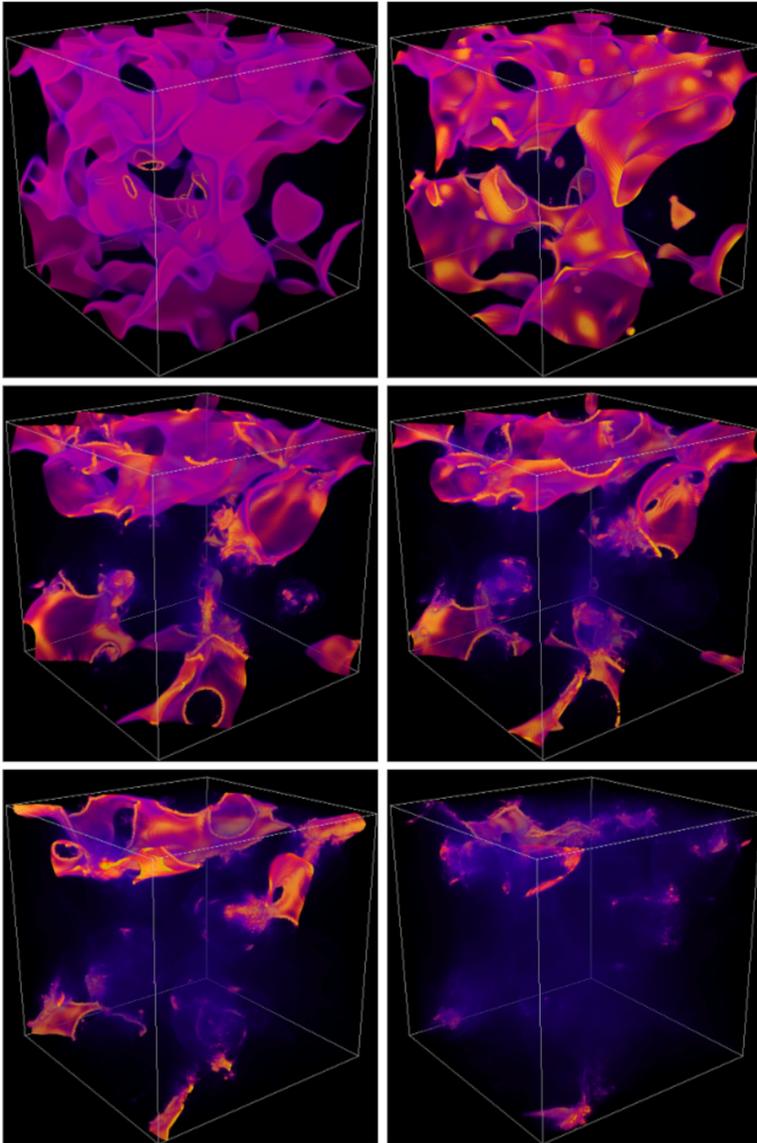


Рис. 4 (цветной в электронной версии). Эволюция кластера плотной солитонной пены, образованного из инфляционных начальных условий. Цветом показано распределение плотности энергии полей в трехмерном пространстве (теплые цвета соответствуют более высоким плотностям энергии). Размер моделирования $L^3 = 900^3 H_{\text{inf}}^{-1}$, временной промежуток между кадрами $\Delta t \approx 100 H_{\text{inf}}^{-1}$

В действительности описанные выше солитонные конфигурации образуют части единого солитонного кластера. Центральная часть этого кластера состоит из плотной пены (см. рис. 2, *в*), а внешняя — из разреженной пены (см. рис. 2, *б*). При еще большем удалении от центра кластера эволюция поля стремится к показанной на рис. 2, *а*, где солитоны вообще не образуются. Таким образом, кластер солитонной пены должен иметь слоистую структуру, в которой плотные внутренние слои постепенно становятся более разреженными, переходя в вакуум и излучение. Очевидно, что общее количество кластеров во Вселенной должно определяться глобальным значением поля в начале инфляции $\Phi_{\text{univ}}^{\text{in}}$, а параметры кластера должны быть тесно связаны с параметрами потенциала (2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрен механизм образования сложных солитонных структур («солитонной пены»). Эти структуры возникают как результат многократных квантовых флуктуаций скалярных полей на стадии инфляции. В работе представлена полевая модель с потенциалом (2), имеющим один локальный пик и седловую точку. Такая форма обобщает широкий класс потенциалов, включая известную модель «наклоненной мексиканской шляпы». Поэтому результаты нашего исследования могут быть применимы и к моделям, отличным от той, что рассмотрена в данной работе.

Показано, что солитонная пена состоит из закрытых доменных стенок (пузырей), доменных стенок, ограниченных струнами (эти основные структуры ранее обсуждались в публикации [3]), и излучения скалярного поля. Кроме того, солитонная пена образует кластер, который имеет слоистую структуру, с более плотными внутренними слоями и более разреженными внешними, постепенно переходящими в вакуум. Такая солитонная пена имеет тенденцию формироваться локально и не заполняет всю Вселенную, в отличие от сценария солитонной сети.

Также эволюция солитонных структур сопровождается излучением скалярного поля. Вдали от солитонных структур это излучение можно интерпретировать как темную материю [24, 25]. Более того, заключительной стадией эволюции солитонов является коллапс, который может привести к образованию ПЧД посредством нескольких механизмов [12, 13, 17, 26–30, 33]. В свою очередь, сами ПЧД активно рассматриваются в качестве кандидатов на роль темной материи [31].

Таким образом, одна модель (1) способна описать формирование темной материи, состоящей из следующих трех компонентов с различным пространственным распределением:

- 1) диффузный однородный фон когерентных колебаний скалярных полей после инфляции;

2) гало массивных скалярных частиц, которые излучаются в процессе релаксации и распада кластеров солитонной пены;

3) компактные кластеры ПЧД, сформированные в результате коллапса замкнутых доменных стенок.

Предложенная модель может естественным образом предсказать как появление зародышей первичных черных дыр в ранней Вселенной и гало темной материи вокруг них, так и диффузный однородный компонент темной материи.

Благодарности. Авторы благодарны С. Г. Рубину, К. М. Белоцкому и В. Д. Стасенко за полезные обсуждения и интерес к работе.

Финансирование. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ, проект «Новые явления в физике элементарных частиц и ранней Вселенной» № FSWU-2023-0073.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zeldovich I.B., Kobzarev I.I., Okun L.B.* Cosmological Consequences of a Spontaneous Breakdown of a Discrete Symmetry // *Sov. Phys. JETP*. 1975. V. 67, No. 1. P. 3–11.
2. *Kibble T. W. B.* Topology of Cosmic Domains and Strings // *J. Phys. A*. 1976. V. 9, No. 8. P. 1387–1398.
3. *Vilenkin A.* Cosmic Strings and Domain Walls // *Phys. Rep.* 1985. V. 121, No. 5. P. 263–315.
4. *Albrecht A., Turok N.* Evolution of Cosmic String Networks // *Phys. Rev. D*. 1989. V. 40, No. 4. P. 973–1001.
5. *Press W. H., Ryden B. S., Spergel D. N.* Dynamical Evolution of Domain Walls in an Expanding Universe // *Astrophys. J.* 1989. V. 347. P. 590.
6. *Hill C. T., Schramm D. N., Fry J. N.* Cosmological Structure Formation from Soft Topological Defects // *Comments Nucl. Part. Phys.* 1989. V. 19, No. 1. P. 25–39.
7. *Friedland A., Murayama H., Perelstein M.* Domain Walls as Dark Energy // *Phys. Rev. D*. 2003. V. 67, No. 4. P. 043519; arXiv:astro-ph/0205520.
8. *Conversi L., Melchiorri A., Mersini L., Silk J.* Are Domain Walls Ruled Out? // *Astropart. Phys.* 2004. V. 21, No. 4. P. 443–449; arXiv:astro-ph/0402529.
9. *Wyman M., Pogosian L., Wasserman I.* Bounds on Cosmic Strings from WMAP and SDSS // *Phys. Rev. D*. 2005. V. 72, No. 2. P. 023513; arXiv:astro-ph/0503364.
10. *Santana Mota H. F., Hindmarsh M.* Big-Bang Nucleosynthesis and Gamma-Ray Constraints on Cosmic Strings with a Large Higgs Condensate // *Phys. Rev. D*. 2015. V. 91, No. 4. P. 043001; arXiv:1407.3599 [hep-ph].
11. *Hindmarsh M., Kume J.* Multi-Messenger Constraints on Abelian-Higgs Cosmic String Networks // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2023. V. 2023, No. 4. P. 045; arXiv:2210.06178.

12. *Rubin S.G., Khlopov M.Y., Sakharov A.S.* Primordial Black Holes from Non-Equilibrium Second Order Phase Transition // *Grav. Cosmol. S.* 2000. V.6. P. 51–58; arXiv:hep-ph/0005271.
13. *Rubin S.G., Sakharov A.S., Khlopov M.Y.* The Formation of Primary Galactic Nuclei during Phase Transitions in the Early Universe // *JETP.* 2001. V.92, No. 6. P. 921–929; arXiv:0106187.
14. *Polnarev A., Zembowicz R.* Formation of Primordial Black Holes by Cosmic Strings // *Phys. Rev. D.* 1991. V. 43, No. 4. P. 1106–1109.
15. *Caldwell R.R., Casper P.* Formation of Black Holes from Collapsed Cosmic String Loops // *Phys. Rev. D.* 1996. V.53, No.6. P.3002–3010; arXiv:gr-qc/9509012.
16. *Vilenkin A., Levin Y., Gruzinov A.* Cosmic Strings and Primordial Black Holes // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2018. V.2018, No.11. P.008; arXiv:1808.00670.
17. *Liu J., Guo Z.K., Cai R.G.* Primordial Black Holes from Cosmic Domain Walls // *Phys. Rev. D.* 2020. V. 101, No. 2. P.023513; arXiv:1908.02662.
18. *Gani V.A., Kirillov A.A., Rubin S.G.* Classical Transitions with the Topological Number Changing in the Early Universe // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2018. V. 2018, No. 4. P. 042; arXiv:1704.03688.
19. *Kirillov A.A., Murygin B.S.* Domain Walls and Strings Formation in the Early Universe // *Bled Workshop Phys.* 2020. V. 21. P. 128–133; arXiv:2011.07041.
20. *Murygin B.S., Kirillov A.A., Nikulin V.V.* Cosmological Formation of (2+1)-Dimensional Soliton Structures in Models Possessing Potentials with Local Peaks // *Physics.* 2021. V. 3, No. 3. P. 563–568; arXiv:2109.03271.
21. *Linde A.D.* Scalar Field Fluctuations in the Expanding Universe and the New Inflationary Universe Scenario // *Phys. Lett. B.* 1982. V. 116, No. 5. P. 335–339.
22. *Linde A.D.* Particle Physics and Inflationary Cosmology. CRC Press, 1990. V. 5. 380 p.; arXiv:hep-th/0503203.
23. *Akrami Y., Ashdown M., Aumont J., Baccigalupi C., Ballardini M., Banday A.J., Barreiro R.B., Bartolo N., Basak S., Benabed K., Bersanelli M., Bielewicz P., Bock J.J., Bond J.R., Borrill J., Bouchet F.R., Boulanger F., Bucher M., Burigana C., Butler R.C., Calabrese E., Cardoso J.F., Casaponsa B., Chiang H.C., Colombo L.P.L., Combet C., Contreras D., Crill B.P., de Bernardis P., de Zotti G., Delabrouille J., Delouis J.M., Di Valentino E., Diego J.M., Doré O., Douspis M., Ducout A., Dupac X., Efstathiou G., Elsner F., Enßlin T.A., Eriksen H.K., Fantaye Y., Fernandez-Cobos R., Finelli F., Frailis M., Fraisse A.A., Franceschi E., Frolov A., Galeotta S., Galli S., Ganga K., Génova-Santos R.T., Gerbino M., Ghosh T., González- Nuevo J., Górski K.M., Gruppuso A., Gudmundsson J.E., Hamann J., Handley W., Hansen F.K., Herranz D., Hivon E., Huang Z., Jaffe A.H., Jones W.C., Keihänen E., Keskitalo R., Kiiveri K., Kim J., Krachmalnicoff N., Kunz M., Kurki-Suonio H., Lagache G., Lamarre J.M., Lasenby A., Lattanzi M., Lawrence C.R., Le Jeune M., Levrier F., Liguori M., Lilje P.B., Lindholm V., López-Cañiego M., Ma Y.Z., Macías-Pérez J.F., Maggio G., Maino D., Mandolesi N., Mangilli A., Marcos-Caballero A., Maris M., Martin P.G., Martínez-González E., Matarrese S., Mauri N., McEwen J.D., Meinhold P.R., Mennella A., Migliaccio M., Miville-Deschênes M.A., Molinari D., Moneti A., Montier L., Morgante G., Moss A., Natoli P., Pagano L., Paoletti D., Par-*

- tridge B., Perrotta F., Pettorino V., Piacentini F., Polenta G., Puget J.L., Rachen J.P., Reinecke M., Remazeilles M., Renzi A., Rocha G., Rosset C., Roudier G., Rubiño-Martín J.A., Ruiz-Granados B., Salvati L., Savelainen M., Scott D., Shellard E.P.S., Sirignano C., Sunyaev R., Suur-Uski A.S., Tauber J.A., Tavagnacco D., Tenti M., Toffolatti L., Tomasi M., Trombetti T., Valenziano L., Valiviita J., Van Tent B., Vielva P., Villa F., Vittorio N., Wandelt B.D., Wehus I.K., Zacchei A., Zibin J.P., Zonca A. (Planck Collab.). Planck 2018 Results. VII. Isotropy and Statistics of the CMB // Astron. Astrophys. 2020. V. 641. P. A7; arXiv:1906.02552.*
24. *Hiramatsu T., Kawasaki M., Saikawa K., Sekiguchi T.* Production of Dark Matter Axions from Collapse of String-Wall Systems // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 85, No. 10. P. 105020; arXiv:1202.5851 [hep-ph].
 25. *Hindmarsh M., Kirk R., West S.M.* Dark Matter from Decaying Topological Defects // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2014. V. 2014, No. 3. P. 037; arXiv: 1311.1637 [hep-ph].
 26. *Hawking S.W.* Black Holes from Cosmic Strings // *Phys. Lett. B.* 1989. V. 231, No. 3. P. 237–239.
 27. *Garriga J., Vilenkin A.* Black Holes from Nucleating Strings // *Phys. Rev. D.* 1993. V. 47, No. 8. P. 3265–3274; arXiv:9208212.
 28. *Hansen R.N., Christensen M., Larsen A.L.* Cosmic String Loops Collapsing to Black Holes // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2000. V. 15, No. 28. P. 4433–4445; arXiv:9902048.
 29. *Helfer T., Aurrekoetxea J.C., Lim E.A.* Cosmic String Loop Collapse in Full General Relativity // *Phys. Rev. D.* 2019. V. 99, No. 10. P. 104028; arXiv:1808.06678.
 30. *Belotsky K.M., Dokuchaev V.I., Eroshenko Y.N., Esipova E.A., Khlopov M.Y., Khromykh L.A., Kirillov A.A., Nikulin V.V., Rubin S.G., Svadkovsky I.V.* Clusters of Primordial Black Holes // *Eur. Phys. J. C.* 2019. V. 79, No. 3. P. 246; arXiv:1807.06590.
 31. *Carr B., Kühnel F.* Primordial Black Holes as Dark Matter: Recent Developments // *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 2020. V. 70. P. 355–394; arXiv:2006.02838.
 32. *Sakharov A.S., Eroshenko Yu.N., Rubin S.G.* Looking at the NANOGrav Signal through the Anthropic Window of Axion-Like Particles // *Phys. Rev. D.* 2021. V. 104, No. 4. 043005; doi: 10.1103/PhysRevD.104.043005; arXiv: 2104.08750[hep-ph].
 33. *Kirillov A.A., Murygin B.S., Nikulin V.V.* Soliton Foam Formation in the Early Universe // *Phys. Lett. B.* 2025. V. 860. 139201; doi: 10.1016/j.physletb. 2024.139201; arXiv: 2412.18997[hep-th].