

ТЕНИ ЧЕРНЫХ ДЫР В МОДЕЛЯХ ХОРНДЕСКИ И БАМБЛБИ: УЧЕТ ВРАЩЕНИЯ

С. О. Алексеев^{1,2,*}, А. А. Байдерин², О. И. Зенин²

¹ Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

С помощью алгоритма Ньюмена–Яниса получены вращающиеся версии решения вида «черная дыра» для моделей Хорндески и бамблби. В результате математического моделирования профилей теней черных дыр для случая двух наиболее вероятных конфигураций Sgr A* показано, что модель Хорндески ослабляет эффект вращения (аналогично гравитации с нелокальными членами), а модель бамблби, напротив, усиливает это вращение.

Using the Newman–Janis algorithm, rotating solutions were obtained for the Horndesky and bumblebee models. Mathematical modelling of black hole shadow profiles was carried out for the case of the two most probable configurations of Sgr A*. As a result, it is shown that the Horndeski model weakens the rotation effect (similarly to gravity with non-local corrections), while the bumblebee model, in contrast, enhances it.

PACS: 04.20.Jb; 04.50.Rd; 04.70.–s; 04.80.Cc

ВВЕДЕНИЕ

Появление новых данных проекта ЕНТ (Event Horizon Telescope) с увеличивающимся разрешением [1] ставит необходимость повышения точности теоретического моделирования теней черных дыр (ЧД), так как наличие ее «фотографии» дает гораздо более точное представление о массе, размере, форме, особенностях аккреционного диска... С самого начала процесс моделирования шел с использованием сферически-симметричных метрик. Если бы выявилась необходимость использования, кроме массы черной дыры, дополнительного «корректирующего» параметра — «приливного» заряда [2] метрики Райсснера–Нордстрёма, это было бы способом «измерить» вклад новой физики [3, 4]. В ходе исследований роли приливного заряда было показано, что его учет (как члена второго порядка малости), как и последующих поправок к сферически-симметричной метрике [5], дает новые возможности для наложения ограничений на современные расширенные теории гравитации при проверке соответ-

* E-mail: alexeyev@physics.msu.ru

ствия их предсказаний размера и характеристик тени реальным экспериментальным результатам ЕНТ [6–8]. С самого начала было понятно, что оба объекта, выбранных для исследования, — это вращающиеся черные дыры [9, 10]. В дальнейшем у М87 удалось вычислить наиболее вероятные значения момента вращения [11]. Таким образом, для повышения точности теоретических предсказаний для корректной интерпретации данных в будущем необходимо использовать метрики вращающихся черных дыр [12, 13]. При поиске локальных решений в новой теории гравитации прежде всего ищут их сферически-симметричные версии как максимально простые. В то же время прямое решение уравнений Эйнштейна для аксиально-симметричного анзаца представляет собой непростую в математическом плане задачу [14]. С учетом этой сложности был предложен и развит метод Ньюмена–Яниса [15], позволяющий сгенерировать аксиально-симметричную метрику из сферически-симметричной. Метод развивался, превращаясь, по сути, в алгоритм [16]. Интерес к нему с новой силой возродился в последние годы в связи с развитием множества расширенных теорий гравитации [17]. С помощью этого алгоритма и анализа полученных решений были выявлены новые соотношения между зарядом и вращением [18] для обычных черных дыр в рамках общей теории относительности (ОТО) для модели бамблби [19] и нелокальных моделей гравитации [20].

Здесь необходимо отметить, что в рамках теорий Хорндески и бамблби существует огромное количество локальных решений. Конкретный вид метрики определяется набором дополнительных (по отношению к тензору Эйнштейна) членов, рассматриваемых в каждом конкретном случае. Нами ранее изучались частные виды метрик черной дыры для модели Хорндески, полученные в работе [21], и модели бамблби из [6, 7].

В работах [18–20] выявлено интересное явление: при рассмотрении керроподобной метрики с дополнительными параметрами, имеющими смысл приливного заряда, новые параметры корректируют размер и форму тени. Способ и направление коррекции зависят от рассматриваемой теории. Таким образом, если после увеличения точности и уточнения результатов ЕНТ будет выявлено неполное соответствие формы и характеристик тени величинам, предсказанным с использованием ОТО и метрики Керра, то появится возможность оценки вклада дополнительных членов (приливного заряда), т. е., по сути, новой физики. При этом важно понимать степень общности такой «коррекции»: присутствует ли она во всех современных расширенных теориях гравитации (полученных из ОТО разными способами) и в каком направлении действует. Исследованию проявлений этого эффекта в теории Хорндески и модели бамблби и посвящена настоящая работа.

Материал построен следующим образом: в разд. 1 рассмотрен способ получения вращающихся решений, в разд. 2 — вращающееся решение в теории Хорндески, в разд. 3 — вращающееся решение в модели бамблби, разд. 4 содержит общие сведения о нашем моделировании теней,

разд. 5 посвящен получению характеристик теней в теории Хорндески, разд. 6 — получению характеристик теней в модели бамблби, а разд. 7 содержит обсуждение полученных результатов и выводы.

1. ВРАЩАЮЩИЕСЯ РЕШЕНИЯ: ПОЛУЧЕНИЕ

Рассмотрим класс метрик, которые можно представить в следующем виде:

$$ds^2 = -G(r) dt^2 + \frac{1}{F(r)} dr^2 + H(r) d\Omega^2. \quad (1)$$

Используя модифицированный метод Ньюмена–Яниса [17], компоненты новой — вращающейся — метрики можно определить как

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{FH + a^2 \cos^2 \theta}{(K + a^2 \cos^2 \theta)^2} \Psi, \\ g_{t\phi} &= -a \sin^2 \theta \frac{K - FH}{(K + a^2 \cos^2 \theta)^2} \Psi, \\ g_{\theta\theta} &= \Psi, \quad g_{rr} = \frac{\Psi}{FH + a^2}, \\ g_{\phi\phi} &= \Psi \sin^2 \theta \left(1 + a^2 \sin^2 \theta \frac{2K - FH + a^2 \cos^2 \theta}{(K + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right). \end{aligned}$$

Здесь $K = H(r)\sqrt{F(r)/G(r)}$. Компоненты вращающейся метрики определены с точностью до функции $\Psi(r, y^2, a)$ ($y \equiv \cos \theta$), которая, в свою очередь, должна удовлетворять системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \Psi(r, y^2, a) &= H(r), \\ (K + a^2 y^2)^2 (3\Psi_r \Psi_{y^2} - 2\Psi \Psi_{r,y^2}) &= 3a^2 K_r \Psi^2, \\ \Psi[K_r^2 + K(2 - K_{rr}) - a^2 y^2 (2 + K_{rr})] &+ (K + a^2 y^2) [4y^2 \Psi_{y^2} - K_r \Psi_r] = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Первое из условий (2) говорит о том, что при $a \rightarrow 0$ решение для вращающейся черной дыры стремится к своей статической форме. Также вводится функция Ψ_c следующим образом:

$$ds_c^2 = \Psi_c / \Psi_n ds_n^2. \quad (3)$$

Следовательно, при $\lim_{a \rightarrow 0} ds_c$ будет получена новая статическая метрика, конформная исходной ds_n^2 . Для случаев $G(r) \neq F(r)$ будем искать именно конформное решение Ψ_c , полагая, что $\lim_{a \rightarrow 0} \Psi_c / \Psi_n = C(r)$ и преобразование $G, F, H \longleftrightarrow CG, F/C, CH$ оставляет ds^2 / Ψ инвариантным [17].

Решение (2) ищется в виде

$$\Psi_c = H(r) \exp[a^2 f(r, a^2 y^2, a)] \approx H(r) + a^2 X(y^2, r) + o(a^2), \quad (4)$$

при этом из разложения по a^2 виден способ генерации нового решения.

2. ВРАЩАЮЩИЕСЯ РЕШЕНИЯ: МОДЕЛЬ ХОРНДЕСКИ

Статическая метрика для модели Хорндески имеет следующий вид (ограничения на этот класс метрик в статическом случае были рассмотрены нами ранее [6, 7]):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{8\alpha_5\eta}{5r^3} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{8\alpha_5\eta}{5r^3}} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (5)$$

После применения модифицированного алгоритма Ньюмена–Яниса вращающуюся метрику можно записать как

$$\begin{aligned} g_{tt} &= - \frac{FH + a^2 \cos^2 \theta}{(K + a^2 \cos^2 \theta)}, \\ g_{t\phi} &= -a \sin^2 \theta \frac{K - FH}{(K + a^2 \cos^2 \theta)}, \\ g_{\theta\theta} &= K(r) + a^2 y^2, \quad g_{rr} = \frac{K(r) + a^2 y^2}{FH + a^2}, \\ g_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta \left(K(r) + a^2 y^2 + a^2 \sin^2 \theta \frac{2K - FH + a^2 \cos^2 \theta}{(K + a^2 \cos^2 \theta)} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G(r) = F(r) &= 1 - \frac{2M}{r} - \frac{8\alpha_5\eta}{5r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \\ H(r) = K(r) &= r^2, \quad \Psi_n = r^2 + a^2 y^2. \end{aligned}$$

3. ВРАЩАЮЩИЕСЯ РЕШЕНИЯ: МОДЕЛЬ БАМБЛБИ

Лагранжиан для одиночного поля бамблби B_μ имеет следующий вид (ограничения на этот класс метрик в статическом случае были рассмотрены нами ранее [6, 7]):

$$\mathcal{L}_B = \frac{e}{2\kappa} R + \frac{e}{2\kappa} \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} e B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - eV(B^\mu) + \mathcal{L}_M, \quad (7)$$

где $e = \sqrt{-g}$ — постоянная связи неминимального взаимодействия гравитации и поля бамблби; \mathcal{L}_M — материя и ее взаимодействие с полем бамблби.

Стартуем с метрики [6, 7]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{1+l}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (8)$$

Тогда

$$G(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad F(r) = \frac{G(r)}{1+l},$$

$$H(r) = r^{\sqrt{1+l}+1}, \quad K(r) = r^2 \sqrt{1+l}^{-1},$$

$$\Psi_n = H(r) + a^2 y^2 r^{\sqrt{1+l}-1} \frac{8(1+l)^{1/2} - 4}{8 - 2(1 + (1+l)^{1/2})}.$$

После применения модифицированного алгоритма Ньюмена–Яниса вращающуюся метрику можно записать как

$$g_{tt} = -\frac{FH + a^2 \cos^2 \theta}{(K + a^2 \cos^2 \theta)^2} \Psi,$$

$$g_{t\phi} = -a \sin^2 \theta \frac{K - FH}{(K + a^2 \cos^2 \theta)^2} \Psi,$$

$$g_{\theta\theta} = \Psi, \quad g_{rr} = \frac{\Psi}{FH + a^2},$$

$$g_{\phi\phi} = \Psi \sin^2 \theta \left(1 + a^2 \sin^2 \theta \frac{2K - FH + a^2 \cos^2 \theta}{(K + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right).$$

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕНЕЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЧЕРНЫХ ДЫР: ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Основным критерием вращения черной дыры для внешнего наблюдателя является изменение формы ее тени, а именно — появление плоского вертикального участка по левому краю [22], как и на приведенных ниже рисунках. Поэтому для численного моделирования теней вращающихся черных дыр была модернизирована написанная нами ранее программа на языке Python [20] (в этой же работе подробно обсуждается способ моделирования теней). Здесь остается лишь добавить, что вычисляются такие величины, как r_s — эффективный размер тени черной дыры, D — смещение тени относительно центра, $\delta = \Delta_{cs}/r_s$ — искажение тени вращающейся черной дыры (где Δ_{cs} — расстояние между левым краем тени и ее круговой аппроксимацией). Модели строятся для наиболее вероятных конфигураций, соответствующих Sgr A*: наклон плоскости вращения по отношению к лучу зрения наблюдателя равен $\pi/6$, значения приведенного углового момента a равны $a = 0,5$ и $0,94$ (относительно массы M) [9]. Также для сравнения показан случай $a = 0$. Стоит отметить, что из результатов наблюдений релятивистского джета M87* удалось определить параметр вращения для M87: $a = 0,9375$, что подтверждает быстрое вращение черной дыры [11].

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕНЕЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЧЕРНЫХ ДЫР: МОДЕЛЬ ХОРНДЕСКИ

Рассмотрим метрику (7), переобозначив $\alpha = 8\alpha_5\eta/5$, и построим профили тени ЧД для различных значений введенного параметра α (рис. 1). В первую очередь оценим эффективный радиус тени ЧД (табл. 1).

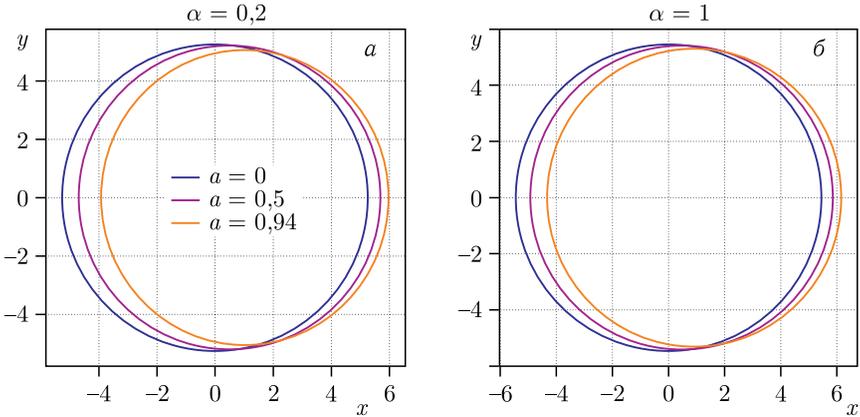


Рис. 1. Профиль тени черной дыры для различных значений вращения a при минимальном значении параметра теории Хорндески $\alpha = 0,2$ (а) и максимальном значении параметра теории Хорндески $\alpha = 1$ (б), угол наклона плоскости вращения $\theta_0 = \pi/6$ (Sgr A*)

Таблица 1. Размер тени r_s , параметр смещения D , параметр искажения δ для различных значений приведенного углового момента a и параметра теории α для модели Хорндески

α	a	r_s	D	δ
0	0	5,19615	0	0
	0,5	5,14013	0,51428	0,00824
	0,94	4,97611	1,09501	0,05687
0,2	0	5,25226	0	0
	0,5	5,20008	0,50151	0,00705
	0,94	5,05022	1,03455	0,04166
0,5	0	5,33105	0	0
	0,5	5,28359	0,48562	0,00575
	0,94	5,15014	0,9766	0,02981
0,8	0	5,40445	0	0
	0,5	5,36082	0,47253	0,0048
	0,94	5,23998	0,9361	0,02299
1	0	5,45085	0	0
	0,5	5,40939	0,46495	0,0043
	0,94	5,29552	0,91458	0,01982

Как и ранее, при увеличении параметра вращения a уменьшается размер тени [20]. Значение $\alpha = 1$ исключается при $a = 0,5$, однако при $a = 0,94$ размер тени ЧД снова находится в допустимом интервале. При $\alpha = 0,8$ также допустима только конфигурация с $a = 0,94$. При $\alpha < 0,5$ возможны обе конфигурации. Обратим внимание, что при увеличении параметра α растет размер тени ЧД, а для случая статической черной дыры исключены большие значения параметра α (из всех использованных в моделировании параметров доступен только $\alpha = 1$).

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕНЕЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЧЕРНЫХ ДЫР: МОДЕЛЬ БАМБЛБИ

Далее рассмотрим модель бамблби. Как уже было показано в работах [6, 7], в классической модели бамблби (как и в любой модели, где метрическая функция $G(r)$ не отличается от случая метрики Шварцшильда) размер тени черной дыры в отсутствии вращения равен размеру тени для черной дыры Шварцшильда ($r_s = 3\sqrt{3}M$). Поэтому на рис. 2 показаны только случаи $a \neq 0$. Как видно из табл. 2, в случае $l \neq 0$ размер тени ЧД меньше, чем для ЧД Керра. С учетом ограничений, найденных по результатам наблюдения Sgr A*, разрешены все значения l , модель теней для которых получена нами здесь. Отметим, что для каждого значения l есть свое критическое значение параметра a , как было определено ранее [19]. Поэтому из всех значений l в случае $a = 0,94$ допустимо только $l = 0,1$ (при $l = 0,2$, например, $a_{\text{crit}} = 0,92$).

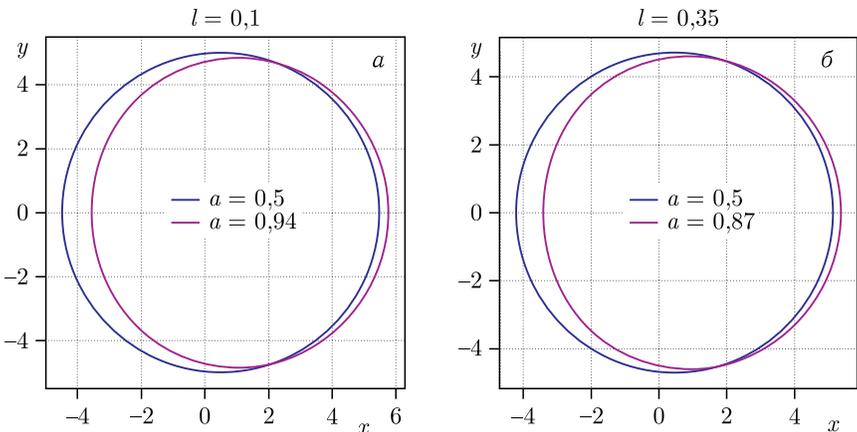


Рис. 2. Профиль тени черной дыры для различных значений вращения a при минимальном значении параметра модели бамблби $l = 0,1$ (а) и максимальном значении параметра модели бамблби $l = 0,35$ (б), угол наклона плоскости вращения $\theta_0 = \pi/6$ (Sgr A*)

Таблица 2. Размер тени r_s , параметр смещения D , параметр искажения δ для различных значений приведенного углового момента a и параметра бамблби l в модели бамблби

l	a	r_s	D	δ
0	0	5,19615	0	0
	0,5	5,14013	0,51428	0,00824
	0,87	5,01209	0,97633	0,04021
	0,92	4,98687	1,05852	0,05116
	0,94	4,97611	1,09501	0,05687
0,1	0	5,19615	0	0
	0,5	5,00541	0,49962	0,00978
	0,87	4,88219	0,97082	0,05085
	0,92	4,85742	1,06461	0,06727
	0,94	4,84678	1,1101	0,07699
0,2	0	5,19615	0	0
	0,5	4,87977	0,48371	0,01133
	0,87	4,76256	0,96686	0,0636
	0,92	4,73847	1,08596	0,09163
	0,3	0	5,19615	0
0,5		4,76195	0,46687	0,01288
0,87		4,65173	0,96852	0,08008
0,35	0	5,19615	0	0
	0,5	4,70566	0,45818	0,01364
	0,87	4,59922	0,97558	0,09152

7. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В данной работе с помощью алгоритма Ньюмена–Яниса были получены вращающиеся решения для моделей Хорндески и бамблби. Так как обе черные дыры являются быстровращающимися согласно [9, 11], для дальнейших исследований получение вращающихся решений типа «черная дыра» и их использование при моделировании теней черных дыр является актуальным. Поэтому нами проведено численное моделирование профилей теней ЧД для случая двух наиболее вероятных конфигураций Sgr A*: угол наклона плоскости вращения относительно луча зрения наблюдателя равен $\theta = \pi/6$, значения параметра вращения равны $a = 0,5$ и $0,94$. В модели Хорндески на основании ограничений на эффективный размер тени ЧД [9] были отброшены значения параметра теории $\alpha > 0,5$ при $a = 0,5$. Однако в случае быстрого вращения при $a = 0,94$ возможны все конфигурации, использованные при моделировании, при этом параметр теории ослабляет эффект вращения. Для модели бамблби показано, что доступны все возможные конфигурации, даже отсеянные ранее в невращающемся случае. Однако для каждого значения l существует свое критическое значение параметра вращения, поэтому случай быстрого вращения с $a = 0,94$ запрещен для большинства значений

параметра l . В модели бамблби, напротив, искажение увеличивается при росте значений параметра бамблби l , таким образом, в модели бамблби дополнительный параметр усиливает эффект вращения.

В конечном итоге можно сделать вывод, что параметры модели Хорндески ослабляют эффект вращения (аналогично гравитации с нелокальными членами [20]), а параметры модели бамблби, напротив, усиливают его (как и в [19]).

Благодарности. Работа осуществлена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-22-00073).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Event Horizon Telescope Collab.* First M87 Event Horizon Telescope Results. IX. Detection of Near-Horizon Circular Polarization // *Astrophys. J. Lett.* 2023. V. 957, No. 2. P. L20.
2. *Dadhich N., Maartens R., Papadopoulos P., Rezanian V.* Black Holes on the Brane // *Phys. Lett. B.* 2000. V. 487. P. 1–6.
3. *Zakharov A. F.* Constraints on a Charge in the Reissner–Nordström Metric for the Black Hole at the Galactic Center // *Phys. Rev. D.* 2014. V. 90. P. 062007.
4. *Алексеев С. О., Стародубцева Д. А.* Черные дыры в моделях с некомпактными дополнительными измерениями // *ЖЭТФ.* 2010. Т. 130, № 4. С. 652–658.
5. *Алексеев С. О., Латош Б. Н., Прокопов В. А., Емцова Е. Д.* Феноменологическое обобщение метрики с приливным зарядом // *ЖЭТФ.* 2019. Т. 155, № 5. С. 847–854.
6. *Прокопов В. А., Алексеев С. О., Зенин О. И.* Тени черных дыр как источник ограничений на расширенные теории гравитации // *ЖЭТФ.* 2022. Т. 162, № 1. С. 108–117.
7. *Прокопов В. А., Алексеев С. О., Зенин О. И.* Тени черных дыр как источник ограничений на расширенные теории гравитации 2: Sgr A* // Там же. № 6(12). С. 878–880.
8. *Alexeyev S., Prokopov V.* Extended Gravity Constraints at Different Scales // *Universe.* 2022. V. 8, No. 5. P. 283.
9. *The Event Horizon Telescope Collab.* First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. VI. Testing the Black Hole Metric // *Astrophys. J. Lett.* 2022. V. 930, No. 2. P. L13.
10. *Akiyama K. et al.* First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring // *Astrophys. J. Lett.* 2019. V. 875. P. L5.
11. *Cui Y., Hada K., Kawashima T. et al.* Precessing Jet Nozzle Connecting to a Spinning Black Hole in M87 // *Nature.* 2023. V. 621. P. 711–715.
12. *Алексеев С. О., Прокопов В. А.* Учет вращения черной дыры при моделировании формы ее тени в расширенных моделях гравитации // *ЖЭТФ.* 2020. Т. 157, № 5. С. 796–801.
13. *Prokopov V., Alexeyev S.* Shadow from a Rotating Black Hole in an Extended Gravity // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2020. V. 35. P. 204060.
14. *Chandrasekhar S.* The Mathematical Theory of Black Holes. New York: Oxford Univ. Press, 1983.

15. *Newman E. T., Janis A. I.* Note on the Kerr Spinning Particle Metric // *J. Math. Phys.* 1965. V. 6. P. 915.
16. *Drake S. P., Szekers P.* Uniqueness of the Newman–Janis Algorithm in Generating the Kerr–Newman Metric // *Gen. Rel. Grav.* 2000. V. 32, No. 3. P. 445–457.
17. *Azreg-Ainou M.* From Static to Rotating to Conformal Static Solutions: Rotating Imperfect Fluid Wormholes with(out) Electric or Magnetic Field // *Eur. Phys. J. C.* 2014. V. 74. P. 2865.
18. *Karas V., Stuchlík Z.* Magnetized Black Holes: Interplay between Charge and Rotation // *Universe.* 2023. V. 9, No. 6. P. 267.
19. *Capozziello S., Zare S., Hassanabadi H.* Testing Bumblebee Gravity with Global Monopoles in a Dark Matter Spike by EHT Observations from M87 and Sgr A. <https://arxiv.org/abs/2311.12896>.
20. *Алексеев С. О., Байдерин А. А., Немтинова А. В., Зенин О. И.* Нелокальные гравитационные теории и изображения теней черных дыр // *ЖЭТФ.* 2024. Т. 165, № 4. С. 508–515.
21. *Babichev E., Charmousis Ch., Lehébel A.* Asymptotically Flat Black Holes in Horndeski Theory and Beyond // *JCAP.* 2017. V. 04. P. 027.
22. *Zakharov A. F.* Classification of Bound and Unbound Geodesics in the Kerr Metric and the Effective Particle Cross-Section of a Reissner–Nordström Black Hole // *Astron. Astrophys. Trans.* 1992. V. 3, No. 2. P. 175.