¶ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА¶
1998, ТОМ 29, ВЫП. 1

УДК 539.1.01

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ И ПРИНЦИП МАХА

А.А.Логунов

Институт физики высоких энергий, Протвино

В обзоре рассматриваются принципы построения релятивистской теории гравитации (РТГ). Настоящее изложение основ РТГ отражает происшедшее за последние десять лет дальнейшее развитие этой теории. Так, например, учитывается необходимость введения массы гравитона и уточняются формулировки основных положений теории, включая и философскую сторону обоснования выбора для описания физических явлений определенной геометрии пространства-времени как продиктованного универсальными свойствами движения материи и фундаментальными законами сохранения.

Показано, что данная теория приводит к единственным образом определенным лагранжевой плотности и уравнениям гравитационного поля. Обсуждаются некоторые физические следствия данной теории.

Basic principles of the Relativistic Theory of Gravitation (RTG) are presented. The progress in this field during last ten years is taken into account. Non zero mass of the graviton and the choice of a certain space-time geometry to describe physics phenomena are motivated by universal properties of the matter movement and fundamental conservation laws.

It is shown that this theory leads to uniquely defined Lagrangian density and equations of the gravitational field. Some physical consequences of the theory are discussed.

ВВЕДЕНИЕ

Поскольку релятивистская теория гравитации (РТГ) строится на основе специальной теории относительности (СТО), мы остановимся на последней более подробно, при этом рассмотрим как подход Анри Пуанкаре, так и подход Альберта Эйнштейна. Такой анализ позволит глубже понять различие этих подходов и даст возможность сформулировать суть теории относительности.

А.Пуанкаре, анализируя преобразования Лоренца, показал, что эти преобразования вместе со всеми пространственными вращениями образуют **группу**, которая не изменяет уравнений электродинамики. Ричард Фейнман об этом писал так: *"Именно Пуанкаре предложил исследовать, что можно делать с уравнениями, не меняя при этом их вида. Именно ему принадлежит идея обратить внимание на свойства симметрии физических законов"*. А.Пуанкаре не ограничился только электродинамикой; он открыл уравнения релятивистской механики и распространил преобразования Лоренца на все силы природы. Открытие группы, которую А.Пуанкаре назвал группой Лоренца, позволило А.Пуанкаре ввести четырехмерное пространство-время с **инвариантом**, названным впоследствии интервалом

$$d\sigma^2 = (dX^0)^2 - (dX^1)^2 - (dX^2)^2 - (dX^3)^2 \; . \qquad (\alpha)$$

Именно отсюда совершенно очевидно, что время и пространственная длина **относительны**.

Позднее дальнейшее развитие в этом же направлении сделал Герман Минковский, введя понятия времениподобных и пространственноподобных интервалов. Точно следуя А.Пуанкаре и Г.Минковскому, суть теории относительности можно сформулировать так: **все физические явления протекают в пространстве-времени, геометрия которого псевдоевклидова и определяется интервалом** (α)**.** При этом важно подчеркнуть, что **геометрия пространства-времени отражает общие динамические свойства материи, которые и делают ее универсальной.** В четырехмерном пространстве (пространство Минковского) можно взять достаточно произвольную систему координат

$$X^\nu = f^\nu(x^\mu) \; ,$$

осуществляющую взаимно однозначное соответствие с якобианом, отличным от нуля. Находя дифференциалы

$$dX^\nu = \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

и подставляя эти выражения в (α), найдем

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \; , \qquad (\beta)$$

где

$$\gamma_{\mu\nu}(x) = \epsilon_\sigma \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\nu} \; , \; \epsilon_\sigma = (1, -1, -1, -1) \; .$$

Совершенно очевидно, что переход к произвольной координатной системе, который был совершен, не вывел нас за рамки псевдоевклидовой геометрии. Но отсюда следует, что в СТО можно пользоваться и неинерциальными системами координат. Силы инерции, возникающие при переходе к ускоренной системе координат, выражаются символами Кристоффеля пространства Минковского. Представление СТО, восходящее к работам А.Пуанкаре и Г.Минковского, явилось более общим и оказалось чрезвычайно необходимым для построения РТГ, так как оно позволило ввести метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}(x)$ пространства Минковского в произвольных координатах и тем самым дало возможность ввести ковариантным образом гравитационное поле, отделив силы инерции от гравитации. А.Эйнштейн к теории относительности шел на основе анализа одновременности и понятия синхронизации часов, находящихся в разных точках пространства, опираясь на принцип постоянства скорости света. “*Каждый луч света движется в “покоящейся” системе координат с определенной скоростью V, независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом*”. Но данное положение нельзя рассматривать как принцип, поскольку оно предполагает определенный выбор координат, а ведь физический принцип не должен зависеть от способа выбора координатной системы. При подходе А.Эйнштейна невозможно прийти к неинерциальным системам координат, так как в них нельзя пользоваться синхронизацией часов, да и скорость света нельзя считать постоянной.

В ускоренной системе координат собственное время $d\tau$ согласно

$$d\sigma^2 = d\tau^2 - s_{ik}dx^i dx^k, \quad d\tau = \frac{\gamma_{0\alpha}dx^\alpha}{\sqrt{\gamma_{00}}}, \quad s_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}}$$

не является полным дифференциалом, а поэтому синхронизация часов, находящихся в разных точках пространства, зависит от пути синхронизации. Это означает, что такое понятие для ускоренных систем координат неприменимо. Следует подчеркнуть, что координаты в выражении (β) сами по себе не имеют метрического смысла. Физически измеряемые величины необходимо строить с помощью координат и метрических коэффициентов $\gamma_{\mu\nu}$. Но все это в СТО долгое время не было понято, поскольку обычно следовали подходу А.Эйнштейна, а не подходу А.Пуанкаре и Г.Минковского. Таким образом, исходные положения А.Эйнштейна имели сугубо ограниченный частный характер, хотя, может быть, они и создали иллюзию простоты. Именно поэтому А.Эйнштейн даже в 1913 году писал: “*В обычной теории относительности допускаются только линейные ортогональные преобразования*”. Или немного позднее в этом же году он писал: “*В первоначальной теории относительности независимость физических уравнений от специального выбора системы отсчета основывается на постулировании фундаментального инварианта $ds^2 = \sum dx_i^2$, а теперь речь идет о том, чтобы построить теорию* (имеется в виду общая теория относительности. — *А.Л.*), *в которой роль фундаментального инварианта играет линейный элемент общего вида*

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx^i dx^k\text{''}.$$

Аналогичное А.Эйнштейн писал и в 1930 году: “*В специальной теории относительности разрешаются только такие изменения координат (преобразования), что и в новых координатах величина ds^2 (фундаментальный инвариант) имеет вид суммы квадратов дифференциалов новых координат. Такие преобразования называются преобразованиями Лоренца*”.

Отсюда видно, что подход А.Эйнштейна не привел его к представлению о псевдоевклидовой геометрии пространства-времени. Из сравнения подходов А.Пуанкаре и А.Эйнштейна к построению СТО становится очевидно, что подход А.Пуанкаре более глубокий и общий, поскольку именно он определил псевдоевклидову структуру пространства-времени. Подход А.Эйнштейна существенно сужал рамки СТО, но так как обычно в литературе изложение ее следовало А.Эйнштейну, то в течение весьма долгого времени считалось, что СТО справедлива только в инерциальных системах координат. При этом пространство Минковского рассматривалось как некоторая полезная геометрическая интерпретация или как математическая формулировка основ СТО в подходе Эйнштейна. Перейдем теперь к гравитации. А.Пуанкаре в 1905 г. писал, *"что силы любого происхождения, и в частности силы тяготения, ведут себя при поступательном движении (или, если угодно, при преобразованиях Лоренца) совершенно так же, как электромагнитные силы"*. Именно по этому пути мы и будем следовать.

А.Эйнштейн, обратив внимание на равенство инертной и гравитационной масс, пришел к убеждению, что силы инерции и гравитации родственны, поскольку их действие не зависит от массы тела. В 1913 году он пришел к выводу, что если в выражении (α) "*мы введем новые координаты x_1, x_2, x_3, x_4, при помощи произвольной подстановки, то относительно новой координатной системы движение точки будет происходить согласно уравнению*

$$\delta\{\int ds\} = 0 ,$$

причем

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \text{ ''};$$

и далее он отмечал: "*В новой координатной системе движение материальной точки определяется величинами $g_{\mu\nu}$, которые в соответствии с предыдущими параграфами следует понимать как составляющие гравитационного поля, как только мы захотим рассматривать эту новую систему "покоящейся"*". Такое отождествление метрического поля, полученного из (α) с помощью координатных преобразований, с гравитационным полем не имеет никаких физических оснований, поскольку преобразования координат не выводят за рамки псевдоевклидовой геометрии. С нашей точки зрения, недопустимо считать такое метрическое поле гравитационным полем, поскольку это противоречит самой сущности понятия поля как физической реальности. Поэтому нельзя согласиться со следующими рассуждениями А.Эйнштейна: "*По отношению к системе K' гравитационное поле "существует", в том же самом смысле, как и всякая другая физическая величина, которая может быть определена в некоторой системе координат, несмотря на то, что её не существует в системе K. Здесь нет ничего странного, и это легко доказать* *следующим примером, заимствованным из классической механики. Никто не сомневается в "реальности" кинетической энергии, так как иначе пришлось бы отрицать энергию вообще. Однако ясно, что кинетическая энергия тел зависит от состояния движения координатной системы: подходящим выбором последней можно, очевидно, сделать так, что в некоторый определенный момент кинетическая энергия поступательного движения одного тела примет наперед заданное положительное или нулевое значение. В специальном случае, при одинаково направленных и равных по величине скоростях всех масс, можно подходящим выбором координатной системы сделать общую кинетическую энергию равной нулю. Аналогия, на мой взгляд, полная*".

А.Эйнштейн, как мы видим, отказался от концепции классического поля типа Фарадея — Максвелла, обладающего плотностью энергии-импульса, в применении к гравитационному полю. Этот путь и привел его к построению ОТО, к нелокализуемости гравитационной энергии, к введению псевдотензора гравитационного поля. Если рассматривать гравитационное поле как физическое поле, то оно, как и все физические поля, характеризуется тензором энергии-импульса $t^{\mu\nu}$. Если в какой-либо системе координат, например K', гравитационное поле существует, то это означает, что некоторые компоненты (или все) тензора $t^{\mu\nu}$ отличны от нуля. Путем преобразования координат тензор $t^{\mu\nu}$ нельзя обратить в нуль, т.е. если гравитационное поле существует, то это — физическая реальность, и ее нельзя уничтожить выбором системы координат. Сравнивать такое гравитационное поле с кинетической энергией неправомерно, поскольку последняя не характеризуется ковариантной величиной. Следует отметить, что такое сравнение недопустимо и в ОТО, поскольку гравитационное поле в этой теории характеризуется тензором кривизны Римана. Если он отличен от нуля, то гравитационное поле существует, и его нельзя уничтожить выбором системы координат.

Ускоренные системы координат сыграли в творчестве А.Эйнштейна важную эвристическую роль, хотя они и не имеют никакого отношения к сути ОТО. Отождествив ускоренные системы координат, в силу равенства инертной и гравитационной масс, с гравитационным полем, А.Эйнштейн пришел к метрическому тензору пространства-времени как основной характеристике гравитационного поля. Но метрический тензор отражает как собственные свойства геометрии, так и выбор координатной системы. На этом пути появляется возможность объяснить силу гравитации кинематически, сведя ее к силе инерции. Но при этом приходится отказаться от гравитационного поля как физического поля. "*Гравитационные поля* (как писал А.Эйнштейн в 1918 г.) *можно задавать, не вводя напряжений и плотности энергии*". Но это очень большая потеря, и с ней нельзя согласиться. Однако, как мы увидим далее, при построении РТГ, этой потери можно избежать.

Удивительно, но А.Эйнштейн даже в 1933 году писал: "*В специальной теории относительности — как показал Г.Минковский — эта метрика была* *квазиевклидовой, т.е. квадрат "длины" ds линейного элемента представлял собой определенную квадратичную функцию дифференциалов координат. Если же вводятся другие координаты с помощью нелинейного преобразования, то ds^2 остается однородной функцией дифференциалов координат, но коэффициенты этой функции $(g_{\mu\nu})$ будут уже не постоянными, а некоторыми функциями координат. Математически это означает, что физическое (четырехмерное) пространство обладает римановой метрикой*". Это, конечно, неправильно, ибо преобразованиями координат невозможно превратить псевдоевклидову метрику в риманову. Но главное здесь не в этом, а в том, что именно таким путем, благодаря глубокой интуиции, А.Эйнштейн пришел к необходимости введения риманова пространства, связав его с гравитацией.

Единство римановой метрики и гравитации является основным принципом общей теории относительности. В.А.Фок об этом принципе писал: "*Он и составляет сущность теории тяготения Эйнштейна*". Введение риманова пространства позволило использовать скалярную кривизну R как лагранжеву функцию и с помощью принципа наименьшего действия получить уравнения Гильберта — Эйнштейна. Так завершилось построение общей теории относительности Эйнштейна. При этом, как особенно подчеркивал Дж.Синг: "*В теории Эйнштейна в зависимости от того, отличен от нуля тензор Римана или равен нулю, гравитационное поле присутствует или отсутствует. Это свойство абсолютно, оно никак не связано с мировой линией какого-то наблюдателя*".

Однако в ОТО возникли трудности с законами сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Д.Гильберт по этому поводу писал: "*... я утверждаю, что для общей теории относительности, т.е. в случае общей инвариантности гамильтоновой функции, уравнений энергии, которые ... соответствуют уравнениям энергии в ортогонально-инвариантных теориях, вообще не существует, я даже мог бы отметить это обстоятельство как характерную черту общей теории относительности*". Все это объясняется тем, что в римановом пространстве отсутствует десятипараметрическая группа движения пространства-времени, а поэтому в принципе нельзя ввести законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения, подобные тем, какие имеют место в любой другой физической теории.

Другой особенностью ОТО, по сравнению с известными теориями, является наличие в лагранжевой функции R вторых производных. Около пятидесяти лет назад Натан Розен показал, что если наряду с римановой метрикой $g_{\mu\nu}$ ввести метрику $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, то можно построить скалярную плотность лагранжиана гравитационного поля, которая будет содержать производные не выше первого порядка. Он, в частности, построил такую плотность лагранжиана, которая приводит к уравнениям Гильберта — Эйнштейна. Так возник двуметрический формализм.

Однако такой подход сразу усложнил проблему построения теории гравитации, поскольку, используя тензоры $g_{\mu\nu}$ и $\gamma_{\mu\nu}$, можно написать большое число скалярных плотностей, и совершенно не ясно, какую скалярную плотность необходимо выбрать в качестве плотности лагранжиана для построения теории гравитации. Хотя математический аппарат ОТО позволяет ввести вместо обычных производных ковариантные производные пространства Минковского, но поскольку метрика $\gamma_{\mu\nu}$ не входит в уравнения Гильберта — Эйнштейна, ее использование в ОТО лишено какого-либо физического смысла, так как решения для метрики $g_{\mu\nu}$ не зависят от выбора $\gamma_{\mu\nu}$.

Следует отметить, что замена обычных производных на ковариантные производные в пространстве Минковского оставляет уравнения Гильберта — Эйнштейна неизменными. Это объясняется тем, что если в тензоре кривизны Римана заменить обычные производные ковариантными в пространстве Минковского, то он не изменится. Такая замена в тензоре Римана есть не что иное, как тождественное преобразование. Именно поэтому в рамках ОТО такую свободу записи тензора Римана нельзя использовать, поскольку метрический тензор пространства Минковского не входит в уравнения Гильберта — Эйнштейна. При построении РТГ эта свобода записи тензора Римана оказывается чрезвычайно необходимой. Но при этом метрика пространства Минковского входит в уравнения гравитационного поля, а само поле рассматривается как физическое поле в пространстве Минковского.

В ОТО мы имеем дело только с метрикой риманова пространства как основной характеристикой гравитации, в которой находят отражение как собственные свойства геометрии, так и выбор системы координат. При выключении гравитационного взаимодействия, т.е. когда тензор кривизны Римана равен нулю, мы приходим к пространству Минковского. Именно из-за этого в ОТО возникает проблема с выполнимостью принципа соответствия, так как нельзя определить, в какой системе координат мы оказались при выключении гравитационного поля.

Релятивистская теория гравитации [1], которая излагается в данной работе с некоторыми дополнениями и уточнениями, строится как полевая теория гравитационного поля в рамках специальной теории относительности. Исходным положением служит гипотеза о том, что источником гравитации является универсальная характеристика материи — тензор энергии-импульса. Гравитационное поле рассматривается как физическое поле со спинами 2 и 0, из-за действия которого и возникает эффективное риманово пространство. Это позволяет найти калибровочную группу и однозначно построить плотность лагранжиана гравитационного поля. Система уравнений данной теории форминвариантна относительно группы Лоренца. В работе дается дальнейшее развитие идей А.Пуанкаре, Г.Минковского, А.Эйнштейна, Д.Гильберта, Н.Розена, В.А.Фока в области теории относительности и гравитации.

1. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Анри Пуанкаре еще в начале века в книге “Наука и гипотеза” писал, что, хотя “... *опыт играет необходимую роль в происхождении геометрии, но было бы ошибкой заключить, что геометрия — хотя бы отчасти — является экспериментальной наукой. Если бы она была экспериментальной наукой, она имела бы только временное, приближенное — и весьма грубо приближенное — значение*”. И далее: ”*Предмет геометрии составляет изучение лишь частной “группы” перемещений, но общее понятие группы существует раньше в нашем уме, по крайней мере в виде возможности... Опыт направляет нас при этом выборе, но не делает его для нас обязательным; он показывает нам не то, какая геометрия наиболее правильна, а то, какая наиболее удобна... Опыты, которые привели нас к принятию основных соглашений геометрии в качестве наиболее удобных, относятся к вещам, которые не имеют ничего общего с объектами изучения геометрии, они относятся к свойствам твердых тел, к прямолинейному распространению света. Это — опыты механические и оптические; их отнюдь нельзя рассматривать как опыты геометрические*”. И далее А.Пуанкаре подчеркивает: “*Принципы — это соглашения и скрытые определения. Тем не менее они извлечены из экспериментальных законов; эти последние были, так сказать, возведены в ранг принципов, которым наш ум приписывает абсолютное значение*”.

Несколько позднее в книге “Последние мысли” в главе II “Пространство и время” А.Пуанкаре писал: “*Принцип физической относительности может служить нам для определения пространства. Он дает нам, так сказать, новый измерительный инструмент. Объяснюсь. Как может твердое тело служить нам для измерения или, правильнее, для построения пространства? Дело обстоит здесь следующим образом: перенося твердое тело из одного места в другое, мы замечаем, таким образом, что его можно приложить сперва к одной фигуре, потом к другой, и мы соглашаемся считать эти фигуры равными. Из этого соглашения родилась геометрия. Геометрия есть не что иное, как учение о взаимных соотношениях этих преобразований или, выражаясь математическим языком, учение о строении группы, образованной этими преобразованиями, т.е. группы движений твердых тел.*

Возьмем теперь другую группу, группу преобразований, не изменяющих наших дифференциальных уравнений. Мы получаем новый способ определения равенства двух фигур. Мы уже не скажем более: две фигуры равны, когда одно и то же твердое тело может быть приложено и к одной, и к другой. Мы скажем: две фигуры равны, когда одна и та же механическая система, удаленная от соседних систем настолько, что ее можно рассматривать как изолированную, будучи помещена сперва таким образом, что ее материальные точки воспроизводят первую фигуру, а затем таким образом, что они воспроизводят другую фигуру, ведет себя во втором случае так же, как и *в первом. Отличаются ли друг от друга существенным образом оба эти взгляда? Нет.*

Твердое тело — это такая же механическая система, как и всякая другая. Вся разница между нашими прежним и новым определениями пространства заключается в том, что последнее шире, позволяя заменить твердое тело любой другой механической системой. Более того, наше новое условное соглашение определяет не только пространство, но и время. Оно объясняет нам, что такое два одновременных момента, что такое два равных промежутка времени или же что такое промежуток времени, вдвое больший другого промежутка". Именно таким путем, открыв группу преобразований, не изменяющих уравнений Максвелла — Лоренца, А.Пуанкаре ввел представление о четырехмерном пространстве-времени с псевдоевклидовой геометрией. Это представление о геометрии позднее развил Г.Минковский.

Если следовать взглядам А.Пуанкаре, то естественно положить в основу любой физической теории псевдоевклидову геометрию пространства-времени как самую простейшую. Как мы увидим далее, этот вывод правилен, но он будет нами усилен дополнительными аргументами.

Спустя много лет, в 1921 году, к обсуждению проблемы о соотношении геометрии и физики обратился и А.Эйнштейн, который в статье "Геометрия и опыт" писал: "*Ясно, что из системы понятий аксиоматической геометрии нельзя получить никаких суждений о таких реально существующих предметах, которые мы называем практически твердыми телами. Чтобы такого рода суждения были возможны, мы должны лишить геометрию ее формально-логического характера, сопоставив пустой схеме понятий аксиоматической геометрии реальные объекты нашего опыта. Для этой цели достаточно прибавить только такое утверждение: твердые тела ведут себя в смысле различных возможностей взаимного расположения, как тела евклидовой геометрии трех измерений; таким образом, теоремы евклидовой геометрии содержат в себе утверждения, определяющие поведение практически твердых тел. Дополняемая таким утверждением геометрия становится, очевидно, естественной наукой; мы можем рассматривать ее фактически как самую древнюю ветвь физики. Ее утверждения покоятся существенным образом на выводах из опыта, а не только на логических заключениях. Будем в дальнейшем называть дополненную таким образом геометрию "практической геометрией" в отличие от "чисто аксиоматической геометрии". Вопрос о том, является ли практическая геометрия евклидовой или нет, приобретает совершенно ясный смысл; ответ на него может дать только опыт.*

Всякие измерения длины в физике точно так же, как и геодезические или астрономические измерения, в этом смысле составляют предмет практической геометрии, если при этом исходить из того опытного закона, что свет распространяется по прямой линии, и именно по прямой в смысле практической геометрии. ...Если же отвлечься от связи между телом аксио-

матической евклидовой геометрии и реальным практически твердым телом, то мы легко приходим к точке зрения, которой придерживался такой оригинальный и глубокий мыслитель, как Анри Пуанкаре: евклидова геометрия отличается от всевозможных мыслимых аксиоматических геометрий своей простотой. А так как аксиоматическая геометрия сама по себе никаких высказываний о реальной действительности не содержит и может это сделать лишь совместно с физическими законами, то представлялось бы возможным и разумным придерживаться евклидовой геометрии, какими бы свойствами не обладала действительность. Если же будет обнаружено противоречие между теорией и опытом, то легче согласиться с изменением физических законов, чем с изменением аксиоматической евклидовой геометрии". И далее: "*Мы чувствуем себя вынужденными перейти к следующему, более общему представлению, характерному для точки зрения Пуанкаре. О поведении реальных вещей геометрия (Г) ничего не говорит, это поведение описывает только геометрия вместе с совокупностью физических законов (Ф). Выражаясь символически, мы можем сказать, что только сумма (Г)+(Ф) является предметом проверки на опыте. Таким образом, можно произвольно выбрать как (Г), так и отдельные части (Ф): все эти законы представляют собой соглашения. Во избежание противоречий необходимо оставшиеся части (Ф) выбрать так, чтобы (Г) и полная (Ф) вместе оправдывались на опыте. При таком воззрении аксиоматическая геометрия, с точки зрения теории познания, равноценна возведенной в ранг соглашения части законов природы. По моему мнению, такое воззрение Пуанкаре с принципиальной точки зрения совершенно правильно*".

Хотя А.Эйнштейн в принципе и согласился с А.Пуанкаре, тем не менее свою точку зрения он сформулировал следующим образом: "*Однако, по моему убеждению, при современном состоянии теоретической физики этими понятиями* (имеются в виду понятия: часы и твердое тело. — *А.Л.) следует пользоваться как независимыми, поскольку мы пока еще далеки от такого понимания теоретических оснований атомистики, которое позволило бы построить теоретически понятия твердых тел и часов из более элементарных*"; и далее А.Эйнштейн подчеркнул: "*Вопрос о том, имеет этот континуум евклидову, риманову или какую-либо другую структуру, является вопросом физическим, ответ на который должен дать опыт, а не вопросом соглашения о выборе на основе простой целесообразности...* .

Такому пониманию геометрии я придаю особое значение, поскольку без него я не смог бы установить теорию относительности. Именно, без нее было бы невозможно следующее соображение: в системе отсчета, которая вращается относительно некоторой инерциальной системы, законы расположения твердых тел не соответствуют правилам евклидовой геометрии вследствие лоренцева сокращения; таким образом, допуская равноправное существование неинерциальных систем, мы должны отказаться от евклидо-

вой геометрии. Без такой интерпретации был бы невозможен и решительный шаг к общековариантным уравнениям". А.Эйнштейн пришел, таким образом, к римановой геометрии пространства-времени, которую он и положил в основу общей теории относительности (ОТО). Однако в римановом пространстве отсутствуют понятия однородности и изотропности пространства, а следовательно, в теории, которая строится на основе римановой геометрии, отсутствуют и обычные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения.

Из предыдущего мы видим, что, следуя мысли А.Пуанкаре, можно прийти к псевдоевклидовой геометрии пространства-времени, тогда как А.Эйнштейн позднее, осуществляя построение ОТО, пришел к римановой структуре пространства-времени, оставив, таким образом, за бортом обычные законы сохранения. В основу выбора геометрии А.Пуанкаре и А.Эйнштейн брали опытные факты, но с той существенной разницей, что А.Пуанкаре, понимая важность опытных фактов, все же допускал возможность выбора, тогда как А.Эйнштейн считал, что вопрос о геометрии есть вопрос физический, и на него должен дать ответ опыт. В принципе это правильно. Но при этом сразу возникает вопрос: какой опыт? Опытных фактов может быть достаточно много. Так, например, изучая движение света и пробных тел, можно, в принципе, однозначно установить геометрию пространства-времени. Необходимо ли ее и положить в основу физической теории? На первый взгляд, на этот вопрос можно ответить утвердительно. И, казалось бы, вопрос исчерпан. Однако ситуация гораздо сложнее. Все виды материи подчиняются законам сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Именно эти законы, возникшие путем обобщения многочисленных опытных данных, характеризуют общие динамические свойства всех форм материи, вводя универсальные характеристики, которые позволяют количественно описать превращение одних форм материи в другие. Ведь все это тоже опытные факты, ставшие фундаментальными физическими принципами. Как быть с ними? Сохранение этих принципов однозначно определяет структуру геометрии, которая, оказывается, должна быть только псевдоевклидовой. Именно в этом случае будут иметь место в теории как закон сохранения энергии-импульса, так и закон сохранения момента количества движения для вещества и гравитационного поля вместе взятых. **Пространство Минковского отражает динамические свойства, общие для всех форм материи, и поэтому оно универсально.** Но это означает, что все то, что относят обычно к кинематике теории относительности, на самом деле есть не что иное как отражение общих динамических свойств материи.

Таким образом, не всякий опыт может быть взят в качестве исходного физического положения при определении структуры пространства. Так, если бы структуру пространства строили на опытных фактах о движении пробных тел и света, то пришли бы, например, к риманову пространству, но это означало бы, что мы потеряли фундаментальные принципы теории — законы сохранения. Выбор псевдоевклидовой структуры геометрии сохраняет основные физические принципы теории — законы сохранения, однако для объяснения движения пробных тел и света необходимо будет ввести новые физические положения. На этом мы подробно остановимся в следующем разделе. Если следовать мысли А.Пуанкаре, то выбор псевдоевклидовой геометрии можно рассматривать как соглашение, но отнюдь не произвольное, поскольку оно точно отражает экспериментальные законы, возведенные в ранг принципов.

В основу развиваемой релятивистской теории гравитации (РТГ) [1] мы положили псевдоевклидову геометрию пространства-времени как фундаментальное пространство Минковского для всех физических полей, в том числе и для гравитационного. Это положение необходимо и достаточно, чтобы имели место интегралы движения — законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения вещества и гравитационного поля вместе взятых. Пространство Минковского нельзя считать априорно существующим, поскольку оно отражает свойство материи, следовательно, оно неотделимо от нее. Хотя формально, именно в силу независимости структуры пространства от вида материи, оно иногда рассматривается абстрактно в отрыве от материи. В галилеевых координатах инерциальной системы пространства Минковского интервал, характеризующий структуру геометрии и являющийся инвариантом по построению, имеет вид

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \ .$$

Здесь dx^ν — дифференциалы координат.

Хотя независимость интервала $d\sigma$, как геометрической характеристики пространства-времени, от выбора системы координат задана по построению, тем не менее до сих пор даже в современных курсах по теоретической физике (см., например, [2]) можно увидеть "доказательство", что интервал одинаков во всех инерциальных системах координат, хотя он является инвариантом и не зависит от выбора системы координат. Даже такой крупный физик, как Л.И.Мандельштам, в книге [3] писал: "*Как идут ускоренно движущиеся часы и почему их ход меняется, на это специальная теория относительности ответить не может, ибо она вообще не занимается вопросом об ускоренно движущихся системах отсчета*".

Все эти заблуждения [4] можно объяснить тем, что пространство Минковского многими рассматривалось не как открытие геометрии пространства-времени, а как якобы формальная геометрическая интерпретация СТО в подходе А.Эйнштейна. На передний план были выдвинуты такие ограниченные понятия, как постоянство скорости света, синхронизация часов, независимость скорости света от движения источника. Все это существенно сузило рамки СТО и задержало понимание ее сути. **А ведь суть ее и состоит только**

в том, что геометрия пространства-времени, в которой протекают все физические процессы, есть псевдоевклидова геометрия.

В произвольной системе координат интервал принимает форму

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \ ,$$

$\gamma_{\mu\nu}(x)$ — метрический тензор пространства Минковского. Заметим, что в неинерциальной системе координат в принципе нельзя говорить о синхронизации часов и постоянстве скорости света [5]. Свободное движение пробного тела в произвольной системе координат происходит по геодезической линии пространства Минковского:

$$\frac{DU^\nu}{d\sigma} = \frac{dU^\nu}{d\sigma} + \gamma^\nu_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 0 \ ,$$

где $U^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}$, $\gamma^\nu_{\alpha\beta}(x)$ — символы Кристоффеля, определяемые выражением

$$\gamma^\nu_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2}\gamma^{\nu\sigma}(\partial_\alpha \gamma_{\beta\sigma} + \partial_\beta \gamma_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma \gamma_{\alpha\beta}) \ .$$

В основу теории гравитации мы положили псевдоевклидову геометрию, но это отнюдь не означает, что и эффективное пространство в присутствии гравитационного поля также будет псевдоевклидовым. Под действием гравитационного поля эффективное пространство будет уже другим. Этот вопрос мы подробно рассмотрим в следующем разделе. Метрика пространства Минковского позволяет ввести понятия эталонной длины и промежутка времени при отсутствии гравитационного поля.

2. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА МАТЕРИИ КАК ИСТОЧНИК ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Благодаря наличию в пространстве Минковского десятипараметрической группы движения Пуанкаре, для любой замкнутой физической системы существуют десять интегралов движения, то есть имеют место законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Любое физическое поле в пространстве Минковского характеризуется плотностью тензора энергии-импульса $t^{\mu\nu}$, являющейся общей универсальной характеристикой для всех форм материи, которая удовлетворяет закону сохранения, как локальному, так и интегральному. В произвольной системе координат локальный закон сохранения записывается в форме

$$D_\mu t^{\mu\nu} = \partial_\mu t^{\mu\nu} + \gamma^\nu_{\alpha\beta} t^{\alpha\beta} = 0 \ .$$

Здесь $t^{\mu\nu}$ — суммарная сохраняющаяся плотность тензора энергии-импульса всех полей материи; D_μ — ковариантная производная в пространстве Минковского.

Мы здесь и в дальнейшем всегда будем иметь дело с плотностями скалярных и тензорных величин, определяемых по правилу

$$\tilde{\phi} = \sqrt{-\gamma}\phi \ , \ \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\phi^{\mu\nu}, \ \gamma = \det(\gamma_{\mu\nu}) \ .$$

Введение плотностей обусловлено тем, что в произвольных координатах инвариантный элемент объема в пространстве Минковского определяется выражением

$$\sqrt{-\gamma}d^4x \ ,$$

а инвариантный элемент объема в римановом пространстве

$$\sqrt{-g}d^4x \ , g = \det(g_{\mu\nu}) \ .$$

Поэтому принцип наименьшего действия выражается формулой

$$\delta S = \delta \int L d^4x = 0 \ ,$$

где L — скалярная плотность лагранжиана материи.

При получении уравнений Эйлера с помощью принципа наименьшего действия мы будем автоматически иметь дело с вариацией именно плотности лагранжиана. Плотность тензора энергии-импульса $t^{\mu\nu}$, согласно Д.Гильберту, выражается через скалярную плотность лагранжиана L следующим образом:

$$t^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} \ , \tag{1}$$

где

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma\left(\frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}}\right) \ , \ \gamma_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \ .$$

В силу универсальности гравитации естественно выдвинуть гипотезу, что сохраняющаяся плотность тензора энергии-импульса всех полей материи $t^{\mu\nu}$ является источником гравитационного поля. Далее мы воспользуемся аналогией с электродинамикой, в которой источником электромагнитного поля является сохраняющаяся плотность заряженного векторного тока j^ν, а само поле имеет векторную природу и описывается плотностью векторного потенциала $\tilde{A}^\nu$:

$$\tilde{A}^\nu = (\tilde{\phi}, \tilde{A}_i) \ .$$

Уравнения электродинамики Максвелла в отсутствие гравитации в произвольных координатах имеют вид

$$\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{A}^\nu + \mu^2\tilde{A}^\nu = 4\pi j^\nu,$$

$$D_\nu \tilde{A}^\nu = 0 \ .$$

Мы здесь для общности ввели массу фотона μ.

Поскольку источником гравитационного поля мы объявили сохраняющуюся плотность тензора энергии-импульса $t^{\mu\nu}$, то естественно считать гравитационное поле тензорным и описывать его плотностью симметрического тензора $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$:

$$\tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\phi^{\mu\nu},$$

и в полной аналогии с электродинамикой Максвелла уравнения гравитационного поля можно записать в виде

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\phi}^{\mu\nu} + m^2 \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \lambda t^{\mu\nu} \ , \tag{2}$$

$$D_\mu \tilde{\phi}^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{3}$$

Здесь λ — некоторая постоянная, которая, исходя из принципа соответствия с законом тяготения Ньютона, должна быть равна 16π. Уравнение (3) исключает спины 1 и $0'$, оставляя поляризационные свойства поля, соответствующие только спинам 2 и 0.

Плотность тензора энергии-импульса материи $t^{\mu\nu}$ состоит из плотности тензора энергии-импульса гравитационного поля $t_g^{\mu\nu}$ и плотности тензора энергии-импульса вещества $t_M^{\mu\nu}$. Под веществом мы имеем в виду все поля материи, за исключением гравитационного поля,

$$t^{\mu\nu} = t_g^{\mu\nu} + t_M^{\mu\nu} \ .$$

Взаимодействие гравитационного поля и вещества учитывается в плотности тензора энергии-импульса вещества $t_M^{\mu\nu}$.

А.Эйнштейн еще в 1913 году в работе [6] писал, “...*что тензор гравитационного поля $\vartheta_{\mu\nu}$ является источником поля наравне с тензором материальных систем $\Theta_{\mu\nu}$. Исключительное положение энергии гравитационного поля по сравнению со всеми другими видами энергии привело бы к недопустимым последствиям*”. Именно эту идею А.Эйнштейна мы и положили в основу построения релятивистской теории гравитации (РТГ). При построении общей теории относительности (ОТО) А.Эйнштейну не удалось ее реализовать, поскольку вместо тензора энергии-импульса гравитационного поля в ОТО возник псевдотензор гравитационного поля. Все это произошло из-за того, что А.Эйнштейн не рассматривал гравитационное поле как физическое поле (типа Фарадея — Максвелла) в пространстве Минковского. Именно поэтому в уравнениях ОТО не содержится метрика пространства Минковского. Из уравнений (2) следует, что они будут нелинейными и для собственно гравитационного поля, поскольку плотность тензора $t_g^{\mu\nu}$ является источником гравитационного поля. Уравнения (2) и (3), которые мы формально по аналогии с электродинамикой объявили уравнениями гравитации, нам необходимо получить из принципа наименьшего действия, ибо только в этом случае мы будем иметь явное выражение для плотности тензора энергии-импульса гравитационного поля и полей вещества. Но для этого необходимо построить плотность лагранжиана вещества и гравитационного поля. При этом чрезвычайно важно это построение осуществить, исходя из общих положений. Только в этом случае можно говорить о теории гравитации. Исходную скалярную плотность лагранжиана материи можно записать в виде

$$L = L_g(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{\phi}^{\mu\nu}) + L_M(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{\phi}^{\mu\nu}, \phi_A) \ ,$$

здесь L_g — плотность лагранжиана гравитационного поля; L_M — плотность лагранжиана полей вещества; ϕ_A — поля вещества.

Уравнения для гравитационного поля и полей вещества, согласно принципу наименьшего действия, имеют вид

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{\phi}^{\mu\nu}} = 0 \ , \qquad (4)$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta \phi_A} = 0 \ . \qquad (5)$$

Уравнения (4) отличаются от уравнений (2) прежде всего тем, что в них вариационная производная от плотности лагранжиана берется по полю $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$, тогда как в уравнения (2), согласно определению (1), входит вариационная производная от плотности лагранжиана по метрике $\gamma_{\mu\nu}$. Для того чтобы при любой форме материи уравнения (4) сводились к уравнениям (2), необходимо предположить, что тензорная плотность $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ всегда входит в плотность лагранжиана совместно с тензорной плотностью $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ через некоторую единую плотность $\tilde{g}^{\mu\nu}$ в форме

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\phi}^{\mu\nu}, \ \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}. \qquad (6)$$

С учетом этого условия плотность лагранжиана L принимает вид

$$L = L_g(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}) + L_M(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A) \ .$$

Следует подчеркнуть, что условие (6) позволяет вариационную производную по $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ заменить вариационной производной по $\tilde{g}^{\mu\nu}$, а вариационную производную по $\gamma_{\mu\nu}$ выразить через вариационную производную по $\tilde{g}_{\mu\nu}$ и через вариационную производную по $\gamma_{\mu\nu}$, явно входящую в плотность лагранжиана L. Действительно,

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{\phi}^{\mu\nu}} = \frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = 0 \ , \qquad (7)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \,. \tag{8}$$

Вывод последней формулы подробно изложен в приложении (A.17). Звездочкой в формуле (8) обозначена вариационная производная от плотности лагранжиана по явно входящей в L метрике $\gamma_{\mu\nu}$. Согласно (1), формулу (8) можно записать в форме

$$t^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - 2\frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} \,.$$

Учитывая в данном выражении уравнение (7), получим

$$t^{\mu\nu} = -2\frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} \,. \tag{9}$$

Сравнивая уравнение (9) с уравнением (2), получим условие

$$-2\frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi}[\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\phi}^{\mu\nu} + m^2 \tilde{\phi}^{\mu\nu}] \,, \tag{10}$$

которое в случае его выполнения обеспечивает возможность получения уравнений гравитационного поля (2) и (3) непосредственно из принципа наименьшего действия. Поскольку в правую часть (10) не входят поля вещества, то это означает, что вариация плотности лагранжиана вещества L_M по явно входящей метрике $\gamma_{\mu\nu}$ должна быть равна нулю. Чтобы не возникало каких-либо дополнительных ограничений на движение вещества, определяемое уравнениями (5), отсюда непосредственно следует, что тензор $\gamma_{\mu\nu}$ не входит явно в выражение для плотности лагранжиана вещества L_M. Условие (10) тогда принимает вид

$$-2\frac{\delta^\star L_g}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi}[\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\phi}^{\mu\nu} + m^2 \tilde{\phi}^{\mu\nu}] \,. \tag{11}$$

Таким образом, все сводится к тому, чтобы найти плотность лагранжиана собственно гравитационного поля L_g, которая удовлетворяла бы условию (11).

В то же время из предыдущих рассуждений мы приходим к важному выводу, что плотность лагранжиана материи L имеет вид

$$L = L_g(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}) + L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A) \,. \tag{12}$$

Таким образом, из требования, чтобы плотность тензора энергии-импульса материи являлась источником гравитационного поля, естественно следует, что движение вещества должно происходить в эффективном римановом пространстве. Именно это обстоятельство даст нам возможность в разделе 3 сформулировать калибровочную группу, а затем построить плотность лагранжиана (55), удовлетворяющую, согласно (Б.20), условию (11).

Возникает интересная картина: движение вещества в пространстве Минковского с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$ под действием гравитационного поля $\phi^{\mu\nu}$ тождественно движению вещества в эффективном римановом пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$, определяемой из выражения (6). Такое взаимодействие гравитационного поля с веществом мы назвали п р и н ц и п о м г е о м е т р и з а ц и и. Принцип геометризации явился следствием исходного предположения о том, что источником гравитационного поля является универсальная характеристика материи — плотность тензора энергии-импульса. Такая структура плотности лагранжиана вещества свидетельствует о том, что реализуется уникальная возможность, когда гравитационное поле подключается в плотности лагранжиана вещества непосредственно к плотности тензора $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$. Эффективное риманово пространство имеет в буквальном смысле слова полевое происхождение, обязанное присутствию гравитационного поля. Поясним это фундаментальное свойство гравитационных сил на примере сравнения их с электромагнитными силами. Как известно, движение заряженной частицы в пространстве Минковского для случая однородного магнитного поля, благодаря силе Лоренца, происходит по окружности в плоскости, перпендикулярной к направлению магнитного поля. Однако это движение далеко не одинаково даже для заряженных частиц, если отношение заряда к массе у них различно. Кроме того, существуют нейтральные частицы, а их траектории в магнитном поле вообще прямолинейны. Поэтому, в силу неуниверсальности электромагнитных сил, их действие нельзя свести к геометрии пространства-времени.

Другое дело гравитация. Она универсальна, движения любых пробных тел происходят по траекториям, одинаковым при тождественных начальных условиях. В этом случае в силу гипотезы о плотности тензора энергии-импульса материи как источнике гравитационного поля удается описать эти траектории геодезическими линиями в эффективном римановом пространстве-времени, возникшем благодаря присутствию гравитационного поля в пространстве Минковского. В тех областях пространства, где имеется сколь угодно слабое гравитационное поле, мы имеем метрические свойства пространства, с большой точностью приближающиеся к непосредственно наблюдаемым свойствам псевдоевклидова пространства. Когда же гравитационные поля являются сильными, метрические свойства эффективного пространства становятся римановыми. Но и в этом случае псевдоевклидова геометрия не исчезает бесследно — она наблюдаема и проявляется в том, что движение тел в эффективном римановом пространстве не является свободным по инерции, а происходит с ускорением по отношению к псевдоевклидову пространству в галилеевых координатах. Именно поэтому ускорение в РТГ, в отличие от ОТО, имеет абсолютный смысл. Следовательно, "лифт Эйнштейна" не может быть инерциальной системой координат. Это проявится в том, что заряд, покоящийся в "лифте Эйнштейна", будет излучать электромагнитные волны. Это физическое явление также должно свидетельствовать о наличии пространства Минковского.

В уравнение движения вещества не входит метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского. Пространство Минковского будет сказываться на движении вещества только через метрический тензор $g_{\mu\nu}$ риманова пространства, определяемый, как мы увидим далее, из уравнений гравитации, в которые входит метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского. Поскольку эффективная риманова метрика возникает на основе физического поля, которое задается в пространстве Минковского, то уже отсюда следует, что эффективное риманово пространство имеет простую топологию и задается в одной карте. Если, например, вещество сосредоточено в области островного типа, то в галилеевых координатах инерциальной системы гравитационное поле $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ не может убывать медленнее, чем $1/r$, но это обстоятельство накладывает сильное ограничение на асимптотическое поведение метрики $g_{\mu\nu}$ эффективной римановой геометрии:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 0\left(\frac{1}{r}\right),\ \text{здесь}\ \eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)\,. \tag{13}$$

Если же исходить просто из римановой метрики, не предполагая, что она возникла из-за действия физического поля, то такие ограничения не возникают, поскольку асимптотика метрики $g_{\mu\nu}$ зависит даже от выбора трехмерных пространственных координат. Тогда как физические величины от выбора трехмерных пространственных координат в принципе не могут зависеть. В РТГ не возникает каких-либо ограничений на выбор системы координат. Координатная система может быть любой, лишь бы она осуществляла взаимнооднозначное соответствие для всех точек инерциальной системы координат пространства Минковского и обеспечивала выполнение неравенств

$$\gamma_{00} > 0,\ dl^2 = s_{ik} dx^i\, dx^k > 0;\ i, k = 1, 2, 3,$$

где

$$s_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{oi}\gamma_{ok}}{\gamma_{oo}},$$

необходимых для введения понятий времени и пространственной длины. В нашей теории гравитации геометрические характеристики риманова пространства возникают как полевые величины в пространстве Минковского, а поэтому их трансформационные свойства становятся тензорными, даже если ранее они таковыми не были. Так, например, символы Кристоффеля, заданные как полевые величины в галилеевых координатах пространства Минковского, уже являются тензорами третьего ранга. Аналогично обычные производные в декартовых координатах пространства Минковского от тензорных величин также являются тензорами.

Может возникнуть вопрос: почему бы и в ОТО не ввести разделение метрики в форме (6), введя понятие гравитационного поля в пространстве Минковского? В уравнения Гильберта — Эйнштейна входит только величина $g_{\mu\nu}$, а следовательно, нельзя однозначно сказать, с помощью какой метрики $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского мы должны определить согласно (6) гравитационное поле. Но трудность не только в этом, а и в том, что решения уравнений Гильберта — Эйнштейна в общем случае задаются не в одной карте, а в атласе карт. Такие решения для $g_{\mu\nu}$ описывают риманово пространство со сложной топологией, тогда как римановы пространства, получаемые с помощью представления гравитационного поля в пространстве Минковского, задаются в одной карте и имеют простую топологию. Именно по этим причинам полевые представления не совместимы с ОТО, поскольку они весьма жесткие. Но это означает, что никакой полевой формулировки ОТО в пространстве Минковского в принципе не может быть, как бы и кому бы этого не захотелось. Аппарат римановой геометрии предрасположен к возможности введения ковариантных производных в пространстве Минковского, чем мы и воспользовались при построении РТГ. Но чтобы это осуществить, потребовалось ввести метрику пространства Минковского в гравитационные уравнения и тем самым удалось осуществить функциональную связь метрики риманова пространства $g_{\mu\nu}$ с метрикой пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$. Но на этом мы подробно остановимся в последующих разделах.

3. КАЛИБРОВОЧНАЯ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Поскольку плотность лагранжиана вещества имеет вид

$$L_M(\tilde{g}^{\mu\nu},\, \phi_A), \tag{14}$$

то легко найти калибровочную группу преобразований, при которых плотность лагранжиана вещества меняется только на дивергенцию. Для этой цели воспользуемся инвариантностью действия

$$S_M = \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu},\, \phi_A)\, d^4x \tag{15}$$

при произвольном бесконечно малом изменении координат

$$x'^{\,\alpha} = x^\alpha + \xi^\alpha(x), \tag{16}$$

где ξ^α — бесконечно малый четырехвектор смещения.

При этих координатных преобразованиях полевые функции $\tilde{g}^{\mu\nu}$, ϕ_A изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{g}'^{\,\mu\nu}(x') &= \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \delta_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \xi^\alpha(x) D_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}(x), \\ \phi'_A(x') &= \phi_A(x) + \delta_\xi \phi_A(x) + \xi^\alpha(x) D_\alpha \phi_A(x), \end{aligned} \tag{17}$$

где выражения

$$\delta_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha \xi^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha \xi^\mu(x) - D_\alpha(\xi^\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}),$$

$$\delta_\xi \phi_A(x) = -\xi^\alpha(x) D_\alpha \phi_A(x) + F^{B;\alpha}_{A;\beta}\, \phi_B(x) D_\alpha \xi^\beta(x) \qquad (18)$$

являются вариациями Ли.

Операторы δ_ξ удовлетворяют условиям алгебры Ли, т.е. коммутационному соотношению

$$[\delta_{\xi_1},\ \delta_{\xi_2}](\cdot) = \delta_{\xi_3}\,(\cdot) \qquad (19)$$

и тождеству Якоби

$$[\delta_{\xi_1},\, [\delta_{\xi_2},\, \delta_{\xi_3}]] + [\delta_{\xi_3},\, [\delta_{\xi_1},\, \delta_{\xi_2}]] + [\delta_{\xi_2},\, [\delta_{\xi_3},\, \delta_{\xi_1}]] = 0,$$

где

$$\xi_3^\nu = \xi_1^\mu D_\mu \xi_2^\nu - \xi_2^\mu D_\mu \xi_1^\nu = \xi_1^\mu \partial_\mu \xi_2^\nu - \xi_2^\mu \partial_\mu \xi_1^\nu. \qquad (20)$$

Для того чтобы имело место (19), необходимо выполнение следующих условий:

$$F^{B;\,\mu}_{A;\,\nu}\, F^{C;\,\alpha}_{B;\,\beta} - F^{B;\,\alpha}_{A;\,\beta}\, F^{C;\,\mu}_{B;\,\nu} = f^{\mu\alpha;\,\tau}_{\nu\beta;\,\sigma}\, F^{C;\,\sigma}_{A;\,\tau}, \qquad (21)$$

где структурные постоянные f равны

$$f^{\mu\alpha;\,\tau}_{\nu\beta;\,\sigma} = \delta^\mu_\beta \delta^\alpha_\sigma \delta^\tau_\nu - \delta^\alpha_\nu \delta^\mu_\sigma \delta^\tau_\beta. \qquad (22)$$

Легко убедиться, что они удовлетворяют тождеству Якоби

$$f^{\alpha\nu;\,\sigma}_{\beta\mu;\,\tau}\, f^{\tau\rho;\,\omega}_{\sigma\varepsilon;\,\delta} + f^{\nu\rho;\,\sigma}_{\mu\varepsilon;\,\tau}\, f^{\tau\alpha;\,\omega}_{\sigma\beta;\,\delta} + f^{\rho\alpha;\,\sigma}_{\varepsilon\beta;\,\tau}\, f^{\tau\nu;\,\omega}_{\sigma\mu;\,\delta} = 0 \qquad (23)$$

и обладают свойством антисимметрии

$$f^{\alpha\nu;\,\rho}_{\beta\mu;\,\sigma} = -f^{\nu\alpha;\,\rho}_{\mu\beta;\,\sigma}.$$

При координатном преобразовании (16) вариация действия равна нулю:

$$\delta_c S = \int\limits_{\Omega'} L'_M(x')\, d^4x' - \int\limits_{\Omega} L_M(x)\, d^4x = 0. \qquad (24)$$

Первый интеграл в (24) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega'} L'_M(x')\, d^4x' = \int\limits_{\Omega} J\, L'_M(x')\, d^4x,$$

где

$$J = \det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial\, x^\beta}\right).$$

В первом порядке по ξ^α детерминант J равен

$$J = 1 + \partial_\alpha \xi^\alpha(x). \tag{25}$$

Учитывая разложение

$$L'_M(x') = L'_M(x) + \xi^\alpha(x)\frac{\partial L_M}{\partial x^\alpha},$$

а также (25), выражение для вариации можно представить в форме

$$\delta_c S_M = \int\limits_\Omega \left[\delta L_M(x) + \partial_\alpha(\xi^\alpha L_M(x))\right] d^4x = 0.$$

В силу произвольности объема интегрирования Ω имеем тождество

$$\delta\, L_M(x) = -\partial_\alpha(\xi^\alpha(x) L_M(x)), \tag{26}$$

где вариация Ли δL_M равна

$$\begin{aligned} \delta L_M(x) &= \frac{\partial L_M}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}\,\delta\tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu})}\,\delta(\partial_\alpha\tilde{g}^{\mu\nu}) + \\ &+ \frac{\partial L_M}{\partial \phi_A}\,\delta\phi_A + \frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\alpha\phi_A)}\,\delta(\partial_\alpha\phi_A). \end{aligned} \tag{27}$$

Отсюда, в частности, следует, что если скалярная плотность зависит только от $\tilde{g}^{\mu\nu}$ и ее производных, то при преобразовании (18) она также изменится только на дивергенцию

$$\delta L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x)) = -\partial_\alpha(\xi^\alpha(x)\, L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x))), \tag{26a}$$

где вариация Ли δL равна

$$\delta L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x)) = \frac{\partial L}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}\,\delta\tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\tilde{g}^{\mu\nu})}\,\delta(\partial_\alpha\tilde{g}^{\mu\nu}) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\tilde{g}^{\mu\nu})}\delta(\partial_\alpha\partial_\beta\tilde{g}^{\mu\nu}). \tag{27a}$$

Вариации Ли (18) были установлены в контексте координатных преобразований (16). Однако можно встать и на другую точку зрения, согласно которой преобразования (18) можно рассматривать как калибровочные преобразования. В этом случае произвольный бесконечно малый четырехвектор $\xi^\alpha(x)$ будет уже калибровочным вектором, а не вектором смещения координат. В дальнейшем, чтобы подчеркнуть отличие калибровочной группы от группы координатных преобразований, для группового параметра мы будем использовать обозначение $\varepsilon^\alpha(x)$, а преобразование полевых функций

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) \to \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \delta\tilde{g}^{\mu\nu}(x),$$

$$\phi_A(x) \to \phi_A(x) + \delta\phi_A(x) \tag{28}$$

с приращениями

$$\delta_\varepsilon \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\mu(x) - D_\alpha(\varepsilon^\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}),$$

$$\delta_\varepsilon \phi_A(x) = -\varepsilon^\alpha(x) D_\alpha \phi_A(x) + F^{B;\,\alpha}_{A;\,\beta}\, \phi_B(x)\, D_\alpha\, \varepsilon^\beta(x) \tag{29}$$

будем называть **калибровочными преобразованиями**.

В полном соответствии с формулами (19) и (20) операторы удовлетворяют той же алгебре Ли, т.е. коммутационному соотношению

$$[\delta_{\varepsilon_1},\ \delta_{\varepsilon_2}](\cdot) = \delta_{\varepsilon_3}(\cdot) \tag{30}$$

и тождеству Якоби

$$[\delta_{\varepsilon_1},\, [\delta_{\varepsilon_2},\, \delta_{\varepsilon_3}]] + [\delta_{\varepsilon_3},\, [\delta_{\varepsilon_1},\, \delta_{\varepsilon_2}]] + [\delta_{\varepsilon_2},\, [\delta_{\varepsilon_3},\, \delta_{\varepsilon_1}]] = 0. \tag{31}$$

Здесь аналогично предыдущему имеем

$$\varepsilon_3^\nu = \varepsilon_1^\mu D_\mu \varepsilon_2^\nu - \varepsilon_2^\mu D_\mu \varepsilon_1^\nu = \varepsilon_1^\mu \partial_\mu \varepsilon_2^\nu - \varepsilon_2^\mu \partial_\mu \varepsilon_1^\nu.$$

Калибровочная группа возникла из геометризованной структуры скалярной плотности лагранжиана вещества $L_M(\tilde{g}^{\mu\nu},\, \phi_A)$, которая в силу тождества (26) изменяется только на дивергенцию при калибровочных преобразованиях (29). Таким образом, принцип геометризации, который определил универсальный характер взаимодействия вещества и гравитационного поля, дал нам возможность сформулировать некоммутативную бесконечномерную калибровочную группу (29).

Существенная разница между калибровочными и координатными преобразованиями проявится в решающем месте в теории при построении скалярной плотности лагранжиана собственно гравитационного поля. Разница возникает из-за того, что при калибровочном преобразовании метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ не изменяется, следовательно, в силу (6) имеем

$$\delta_\varepsilon \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \delta_\varepsilon \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x).$$

На основании (19) следует преобразование для поля

$$\delta_\varepsilon \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\alpha}\, D_\alpha\, \varepsilon^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha}\, D_\alpha\, \varepsilon^\mu(x) - D_\alpha(\varepsilon^\alpha\, \tilde{g}^{\mu\nu}),$$

но оно существенно отличается от его преобразования при смещении координат:

$$\delta_\xi\, \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x) = \tilde{\phi}^{\mu\alpha}\, D_\alpha \xi^\nu(x) + \tilde{\phi}^{\nu\alpha}\, D_\alpha \xi^\mu(x) - D_\alpha(\xi^\alpha\, \tilde{\phi}^{\mu\nu}).$$

При калибровочных преобразованиях (29) уравнения движения для вещества не изменяются, поскольку при любых таких преобразованиях плотность лагранжиана вещества изменяется только на дивергенцию.

4. ПЛОТНОСТЬ ЛАГРАНЖИАНА И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Как известно, используя только тензор $g_{\mu\nu}$, невозможно построить скалярную плотность лагранжиана собственно гравитационного поля относительно произвольных координатных преобразований в виде квадратичной формы производных не выше первого порядка. Поэтому в такую плотность лагранжиана будет обязательно входить наряду с метрикой $g_{\mu\nu}$ также и метрика $\gamma_{\mu\nu}$. Но, так как при калибровочном преобразовании (29) метрика $\gamma_{\mu\nu}$ не изменяется, следовательно, чтобы при этом преобразовании плотность лагранжиана собственно гравитационного поля изменялась только на дивергенцию, должны возникнуть сильные ограничения на ее структуру. Именно здесь и возникает принципиальная разница между калибровочным и координатным преобразованиями.

В то время как координатные преобразования не накладывают почти никаких ограничений на структуру скалярной плотности лагранжиана собственно гравитационного поля, калибровочные преобразования позволят нам найти плотность лагранжиана. Прямой общий метод построения лагранжиана приведен в монографии [1].

Здесь мы изберем более простой метод построения лагранжиана. На основании (26a) заключаем, что простейшие скалярные плотности $\sqrt{-g}$ и $\tilde{R} = \sqrt{-g}R$, где R — скалярная кривизна эффективного риманова пространства, при калибровочном преобразовании (29) изменяются следующим образом:

$$\sqrt{-g} \to \sqrt{-g} - D_\nu(\varepsilon^\nu \sqrt{-g}), \tag{32}$$

$$\tilde{R} \to \tilde{R} - D_\nu(\varepsilon^\nu \tilde{R}). \tag{33}$$

Скалярная плотность $\tilde{R}$ выражается через символы Кристоффеля

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu\, g_{\sigma\nu} + \partial_\nu\, g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\, g_{\mu\nu}) \tag{34}$$

таким образом:

$$\tilde{R} = -\tilde{g}^{\mu\nu}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\, \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\, \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}) - \partial_\nu(\tilde{g}^{\mu\nu}\, \Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma}\, \Gamma^\nu_{\mu\sigma}). \tag{35}$$

Поскольку символы Кристоффеля не являются тензорными величинами, каждое слагаемое в (35) не является скалярной плотностью. Однако, если ввести тензорные величины

$$G^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\sigma}(D_\mu g_{\sigma\nu} + D_\nu g_{\sigma\mu} - D_\sigma g_{\mu\nu}), \tag{36}$$

то скалярную плотность можно тождественно записать в виде

$$\tilde{R} = -\tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu}\, G^\sigma_{\lambda\sigma} - G^\lambda_{\mu\sigma}\, G^\sigma_{\nu\lambda}) - D_\nu(\tilde{g}^{\mu\nu}\, G^\sigma_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma}\, G^\nu_{\mu\sigma}). \tag{37}$$

Заметим, что в (37) каждая группа членов в отдельности ведет себя при произвольных координатных преобразованиях как скалярная плотность. Мы видим, что аппарат римановой геометрии предрасположен к введению вместо обычных производных — ковариантных в пространстве Минковского, однако метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$, с помощью которого определяются ковариантные производные, при этом никак не фиксируется.

Учитывая (32) и (33), выражение

$$\lambda_1(\tilde{R} + D_\nu\, Q^\nu) + \lambda_2\sqrt{-g} \tag{38}$$

при произвольных калибровочных преобразованиях изменяется только на дивергенцию. Выбирая векторную плотность равной

$$Q^\nu = \tilde{g}^{\mu\nu}\, G^\sigma_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma}\, G^\nu_{\mu\sigma},$$

мы исключаем из предыдущего выражения члены с производными выше первого порядка и получаем следующую плотность лагранжиана:

$$-\lambda_1\tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu}\, G^\sigma_{\lambda\sigma} - G^\lambda_{\mu\sigma}\, G^\sigma_{\nu\lambda}) + \lambda_2\sqrt{-g}. \tag{39}$$

Таким образом, мы видим, что требование, чтобы плотность лагранжиана собственно гравитационного поля при калибровочном преобразовании (29) изменялась только на дивергенцию, однозначно определяет структуру плотности лагранжиана (39). Но если ограничиться только этой плотностью, тогда уравнения гравитационного поля будут калибровочно-инвариантными, а метрика пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$ не войдет в систему уравнений, определяемых плотностью лагранжиана (39). Поскольку в таком подходе исчезает метрика пространства Минковского, то и исключается возможность представления гравитационного поля как физического поля типа Фарадея — Максвелла в пространстве Минковского.

При плотности лагранжиана (39) введение метрики $\gamma_{\mu\nu}$ с помощью уравнений (3) не спасает положение, поскольку физические величины — интервал и тензор кривизны риманова пространства, а также тензор $t^{\mu\nu}_g$ гравитационного поля — будут зависеть от выбора калибровки, что физически недопустимо. Так, например,

$$\delta_\epsilon R_{\mu\nu} = -R_{\mu\sigma}D_\nu\epsilon^\sigma - R_{\nu\sigma}D_\mu\epsilon^\sigma - \epsilon^\sigma D_\sigma R_{\mu\nu}\ ,$$

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon R_{\mu\nu\alpha\beta} &= -R_{\sigma\nu\alpha\beta}D_\mu\epsilon^\sigma - R_{\mu\sigma\alpha\beta}D_\nu\epsilon^\sigma - \\ &-R_{\mu\nu\sigma\beta}D_\alpha\epsilon^\sigma - R_{\mu\nu\alpha\sigma}D_\beta\epsilon^\sigma - \epsilon^\sigma D_\sigma R_{\mu\nu\alpha\beta}\ .\end{aligned}$$

Для того чтобы сохранить представления о поле в пространстве Минковского и исключить такую неоднозначность, необходимо добавить в плотность лагранжиана гравитационного поля член, нарушающий калибровочную группу.

На первый взгляд, может показаться, что здесь возникает большой произвол в выборе плотности лагранжиана гравитационного поля, так как нарушить группу можно весьма различными способами. Однако оказывается, что это не так, поскольку наше физическое требование на поляризационные свойства гравитационного поля как поля со спинами 2 и 0, накладываемое уравнениями (3), приводит к тому, что член, нарушающий группу (29), должен быть выбран таким образом, чтобы уравнения (3) являлись следствиями системы уравнений гравитационного поля и полей вещества, ибо только в этом случае у нас не возникает переопределенная система дифференциальных уравнений. Для этой цели в скалярную плотность лагранжиана гравитационного поля введем член вида

$$\gamma_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu}, \tag{40}$$

который при наличии условий (3) и при преобразованиях (29) изменяется также на дивергенцию, но только на классе векторов, удовлетворяющих условию

$$g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu \varepsilon^\sigma(x) = 0. \tag{41}$$

Почти аналогичная ситуация имеет место в электродинамике с массой покоя фотона, отличной от нуля. С учетом (38)–(40) общая скалярная плотность лагранжиана имеет вид

$$L_g = -\lambda_1 \tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu}\, G^\sigma_{\lambda\sigma} - G^\lambda_{\mu\sigma}\, G^\sigma_{\nu\lambda}) + \lambda_2\sqrt{-g} + \lambda_3\,\gamma_{\mu\nu}\,\tilde{g}^{\mu\nu} + \lambda_4\sqrt{-\gamma}. \tag{42}$$

Последний постоянный член в (42) мы ввели, чтобы с его помощью обратить в нуль плотность лагранжиана при отсутствии гравитационного поля. Сужение класса калибровочных векторов из-за введения члена (40) автоматически приводит к тому, что уравнения (3) будут следствиями уравнений гравитационного поля. В этом мы непосредственно убедимся ниже.

Согласно принципу наименьшего действия уравнения для собственного гравитационного поля имеют вид

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \lambda_1 R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\lambda_2\, g_{\mu\nu} + \lambda_3\,\gamma_{\mu\nu} = 0, \tag{43}$$

здесь

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{\partial L_g}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} - \partial_\sigma\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma \tilde{g}^{\mu\nu})}\right)\,,$$

где $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи запишем в форме

$$R_{\mu\nu} = D_\lambda\, G^\lambda_{\mu\nu} - D_\mu\, G^\lambda_{\nu\lambda} + G^\sigma_{\mu\nu}\, G^\lambda_{\sigma\lambda} - G^\sigma_{\mu\lambda}\, G^\lambda_{\nu\sigma}. \tag{44}$$

Поскольку в случае отсутствия гравитационного поля уравнения (43) должны тождественно выполняться, отсюда следует

$$\lambda_2 = -\,2\,\lambda_3. \tag{45}$$

Найдем теперь плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля в пространстве Минковского

$$t_g^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_g}{\delta\,\gamma_{\mu\nu}} = 2\sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta})\;\frac{\delta L_g}{\delta\tilde{g}^{\alpha\beta}} +$$

$$+\lambda_1\,J^{\mu\nu} - 2\lambda_3\,\tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4\,\tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \tag{46}$$

где

$$J^{\mu\nu} = D_\alpha D_\beta(\gamma^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu}\tilde{g}^{\beta\mu} - \gamma^{\alpha\beta}\,\tilde{g}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu}\,\tilde{g}^{\alpha\beta}) \tag{47}$$

(см. приложение (Б.19)). Если в выражении (46) учесть динамические уравнения (43), то мы получим уравнения для собственно гравитационного поля в форме

$$\lambda_1\,J^{\mu\nu} - 2\,\lambda_3\tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4\,\tilde{\gamma}^{\mu\nu} = t_g^{\mu\nu}. \tag{48}$$

Для того чтобы это уравнение в случае отсутствия гравитационного поля удовлетворялось тождественно, необходимо положить

$$\lambda_4 = -2\,\lambda_3. \tag{49}$$

Поскольку для собственно гравитационного поля всегда имеет место равенство

$$D_\mu\,t_g^{\mu\nu} = 0, \tag{50}$$

из уравнения (48) следует

$$D_\mu\,\tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \tag{51}$$

Таким образом, уравнения (3), определяющие поляризационные состояния поля, непосредственно следуют из уравнений (48). С учетом уравнений (51) полевые уравнения (48) можно записать в виде

$$\gamma^{\alpha\beta}\,D_\alpha\,D_\beta\,\tilde{\phi}^{\mu\nu} - \frac{\lambda_4}{\lambda_1}\,\tilde{\phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1}\;t_g^{\mu\nu}. \tag{52}$$

В галилеевых координатах это уравнение имеет простой вид

$$\Box\tilde{\phi}^{\mu\nu} - \frac{\lambda_4}{\lambda_1}\,\tilde{\phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1}\,t_g^{\mu\nu}. \tag{53}$$

Числовому фактору $-\frac{\lambda_4}{\lambda_1} = m^2$ естественно придать смысл квадрата массы гравитона, а значение $-1/\lambda_1$, согласно принципу соответствия, необходимо взять равным 16π. Таким образом, все неизвестные постоянные, входящие в плотность лагранжиана, определены:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{16\pi}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = -2\,\lambda_3 = \frac{m^2}{16\,\pi}. \tag{54}$$

Построенная скалярная плотность лагранжиана собственно гравитационного поля будет иметь вид

$$L_g = \frac{1}{16\,\pi}\,\tilde{g}^{\mu\nu}(G^{\lambda}_{\mu\nu}\,G^{\sigma}_{\lambda\sigma} - G^{\lambda}_{\mu\sigma}\,G^{\sigma}_{\nu\lambda}) - \frac{m^2}{16\,\pi}\left(\frac{1}{2}\,\gamma_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} - \sqrt{-g} - \sqrt{-\gamma}\right). \quad (55)$$

Соответствующие ей динамические уравнения для собственно гравитационного поля могут быть записаны в форме

$$J^{\mu\nu} - m^2\,\tilde{\phi}^{\mu\nu} = -16\pi\,t^{\mu\nu}_g, \quad (56)$$

или

$$R^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}(g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}) = 0. \quad (57)$$

Эти уравнения существенно ограничивают класс калибровочных преобразований, оставляя лишь тривиальные, удовлетворяющие условиям Киллинга в пространстве Минковского. Такие преобразования являются следствием лоренцевой инвариантности и имеют место в любой теории.

Построенная выше плотность лагранжиана приводит к уравнениям (57), из которых следует, что уравнения (51) являются их следствиями, а поэтому вне вещества мы будем иметь десять уравнений для десяти неизвестных полевых функций. С помощью уравнений (51) неизвестные полевые функции $\phi^{o\alpha}$ легко выражаются через полевые функции ϕ^{ik}, где значки i и k пробегают значения 1, 2, 3. Таким образом, в плотности лагранжиана собственно гравитационного поля структура массового члена, нарушающего калибровочную группу, однозначно определяется поляризационными свойствами гравитационного поля.

5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ВЕЩЕСТВА

Полная плотность лагранжиана вещества и гравитационного поля равна

$$L = L_g + L_M(\tilde{g}^{\mu\nu},\,\phi_A), \quad (58)$$

где L_g определяется выражением (55).

На основании (58) с помощью принципа наименьшего действия получим полную систему уравнений для вещества и гравитационного поля:

$$\frac{\delta L}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} = 0, \quad (59)$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta\phi_A} = 0. \quad (60)$$

Поскольку при произвольном бесконечно малом изменении координат вариация действия $\delta_c S_M$ равна нулю,

$$\delta_c S_M = \delta_c \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu},\, \phi_A)\, d^4x = 0,$$

отсюда можно получить тождество (см. приложение В, ф-ла (16)) в форме

$$g_{\mu\nu} \nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = -D_\nu \left(\frac{\delta L_M}{\delta \phi_A}\, F^{B;\,\nu}_{A;\,\mu}\, \phi_B(x) \right) - \frac{\delta L_M}{\delta \phi_A}\, D_\mu\, \phi_A(x). \tag{61}$$

Здесь $T^{\lambda\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta g_{\lambda\nu}}$ — плотность тензора вещества в римановом пространстве; ∇_λ — ковариантная производная в этом пространстве с метрикой $g_{\lambda\nu}$. Из тождества (61) следует, что если выполняются уравнения движения вещества (60), то имеет место уравнение

$$\nabla_\lambda\, T^{\lambda\nu} = 0. \tag{62}$$

В том случае, если число уравнений (60) для вещества равно четырем, вместо них можно использовать эквивалентные им уравнения (62). Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело только с такими уравнениями для вещества, всегда будем пользоваться уравнениями для вещества в форме (62). Таким образом, полная система уравнений для вещества и гравитационного поля будет иметь вид

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = 0, \tag{63}$$

$$\nabla_\lambda\, T^{\lambda\nu} = 0. \tag{64}$$

Вещество будет описываться скоростью $\vec{v}$, плотностью вещества ρ и давлением p. Гравитационное поле определяется десятью компонентами тензора $\phi^{\mu\nu}$.

Итак, мы имеем 15 неизвестных. Для их определения необходимо к 14 уравнениям (63)–(64) добавить уравнение состояния вещества. Если принять во внимание соотношения

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\,\pi}\, R_{\mu\nu} + \frac{m^2}{32\,\pi}\, (g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}), \tag{65}$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, T \right), \tag{66}$$

то систему уравнений (63) и (64) можно представить в форме

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} R) + \frac{m^2}{2} [g^{\mu\nu} + (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta})\, \gamma_{\alpha\beta}] = \frac{8\,\pi}{\sqrt{-g}}\, T^{\mu\nu}, \tag{67}$$

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0. \qquad (68)$$

В силу тождества Бьянки

$$\nabla_\mu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) = 0$$

из уравнений (67) имеем

$$m^2 \sqrt{-g}(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = 16\,\pi\, \nabla_\mu T^{\mu\nu}. \qquad (69)$$

Учитывая выражение

$$\nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = -G^\sigma_{\mu\alpha} \gamma_{\sigma\beta} - G^\sigma_{\mu\beta} \gamma_{\sigma\alpha}, \qquad (70)$$

где $G^\sigma_{\mu\alpha}$ определено формулой (36), найдем

$$(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\mu\lambda} g^{\mu\nu} (D_\sigma g^{\sigma\lambda} + G^\beta_{\alpha\beta} g^{\alpha\lambda}), \qquad (71)$$

но так как

$$\sqrt{-g}(D_\sigma g^{\sigma\lambda} + G^\beta_{\alpha\beta} g^{\alpha\lambda}) = D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma}, \qquad (72)$$

выражение (71) принимает вид

$$\sqrt{-g}(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\mu\lambda} g^{\mu\nu} D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma}. \qquad (73)$$

Используя (73), выражение (69) может быть представлено в форме

$$m^2 \gamma_{\mu\lambda} g^{\mu\nu} D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 16\pi \nabla_\mu T^{\mu\nu}.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$m^2 D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 16\,\pi\, \gamma^{\lambda\nu} \nabla_\mu T^\mu_\nu. \qquad (74)$$

С помощью этого соотношения уравнение (68) можно заменить уравнением

$$D_\sigma \tilde{g}^{\nu\sigma} = 0. \qquad (75)$$

Поэтому система уравнений (67) и (68) сводится к системе гравитационных уравнений в виде

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) + \frac{m^2}{2} [g^{\mu\nu} + (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \gamma_{\alpha\beta}] = \frac{8\,\pi}{\sqrt{-g}} T^{\mu\nu}, \qquad (76)$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \qquad (77)$$

Эти уравнения форминвариантны относительно преобразований Лоренца, т.е. в любой инерциальной (галилеевой) системе координат явления описываются одинаковыми уравнениями.

Конкретная инерциальная галилеева система координат выделяется самой постановкой физической задачи (начальными и граничными условиями). Описание данной поставленной физической задачи в разных инерциальных (галилеевых) системах координат, конечно, различно, но это не противоречит принципу относительности. Если ввести тензор

$$N^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}[g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}], \;\; N = N^{\mu\nu}g_{\mu\nu},$$

то систему уравнений (76) и (77) можно записать в форме

$$N^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} N = \frac{8\,\pi}{\sqrt{-g}}\, T^{\mu\nu}, \tag{76a}$$

$$D_\mu\, \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \tag{77a}$$

Она может быть представлена также в виде

$$N^{\mu\nu} = \frac{8\,\pi}{\sqrt{-g}}(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, T), \tag{78}$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0, \tag{79}$$

или

$$N_{\mu\nu} = \frac{8\,\pi}{\sqrt{-g}}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, T), \tag{78a}$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \tag{79a}$$

Необходимо особо подчеркнуть, что как в систему (78), так и в систему уравнений (79) входит метрический тензор пространства Минковского.

Преобразования координат, которые оставляют метрику пространства Минковского форминвариантной, связывают физически эквивалентные системы отсчета. Простейшими из них будут инерциальные системы. Поэтому возможные калибровочные преобразования, удовлетворяющие условиям Киллинга

$$D_\mu \varepsilon_\nu + D_\nu \varepsilon_\mu = 0,$$

не выводят нас из класса физически эквивалентных систем отсчета.

Если мысленно допустить возможность экспериментального измерения характеристик риманова пространства и движения вещества со сколь угодно большой точностью, то на основании уравнений (78a) и (79a) мы можем определить метрику пространства Минковского и найти галилеевы (инерциальные) системы координат. Таким образом, пространство Минковского является, в принципе, наблюдаемым.

Существование пространства Минковского находит отражение в законах сохранения, а поэтому проверка их в физических явлениях является в то же время проверкой структуры пространства-времени.

Следует особо отметить, что как в систему уравнений (76), так и в систему уравнений (77) входит метрический тензор пространства Минковского. Как известно, в ОТО присутствие космологического члена в уравнениях не является обязательным, и этот вопрос обсуждается до сих пор. В РТГ наличие космологического члена в уравнениях гравитации обязательно. Однако космологический член возникает в уравнениях (76) в комбинации с членом, связанным с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, причем с той же постоянной, равной половине квадрата массы гравитона. Наличие члена в уравнениях (76), связанного с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$, существенно изменяет характер коллапса и развития Вселенной. Согласно уравнениям (76), при отсутствии вещества и гравитационного поля метрика пространства становится метрикой Минковского, причем она точно совпадает с выбранной ранее при постановке физической задачи. Если бы в уравнениях гравитационного поля метрика пространства Минковского отсутствовала, то совершенно не было бы ясно, в какой системе координат пространства Минковского мы оказались при отсутствии вещества и гравитационного поля.

Введение массы гравитона имеет принципиальное значение для данной теории, поскольку только с ее введением удается построить теорию гравитации в пространстве Минковского. Масса гравитона нарушает калибровочную группу или, другими словами, она снимает вырождение. Поэтому нельзя исключить возможность устремления массы гравитона к нулю в окончательных результатах при изучении гравитационных эффектов. Однако теория с массой гравитона и теория с нарушенной калибровочной группой [7] (с последующим устремлением массы гравитона к нулю) — это в принципе разные теории. Так, например, если в первой имеет место однородная и изотропная Вселенная, то во второй такой Вселенной не может быть.

Остановимся теперь на принципе соответствия. Любая физическая теория должна удовлетворять принципу соответствия. Гравитационные взаимодействия изменяют уравнения движения вещества. Требование принципа соответствия сводится к тому, чтобы эти уравнения движения при выключении гравитационного взаимодействия, т.е. при обращении в нуль тензора кривизны Римана, становились обычными уравнениями движения СТО в выбранной системе координат.

При постановке физической задачи в РТГ мы выбираем некоторую систему координат с метрическим тензором пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}(x)$. В РТГ уравнение движения вещества в эффективном римановом пространстве с метрическим тензором $g_{\mu\nu}(x)$, определяемым из уравнений гравитационного поля (76) и (77), имеет вид

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0. \qquad (\sigma)$$

В качестве примера возьмем пылевидную материю с тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, равным

$$T^{\mu\nu}(x) = \rho U^\mu U^\nu,\ U^\nu = \frac{dx^\nu}{ds},$$

ds — интервал в римановом пространстве.

На основании уравнений (σ), используя выражение для $T^{\mu\nu}$, найдем уравнение для геодезической линии в римановом пространстве

$$\frac{dU^\nu}{ds} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}(x) U^\alpha U^\beta = 0.$$

При выключении гравитационного взаимодействия, т.е. при обращении тензора кривизны Римана в нуль, из уравнений гравитационного поля (76) и (77) следует, что риманова метрика $g_{\mu\nu}(x)$ переходит в ранее выбранную метрику пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}(x)$. При этом уравнение движения вещества (σ) принимает вид

$$D_\mu t^{\mu\nu}(x) = 0. \qquad (\lambda)$$

Здесь тензор энергии-импульса $t^{\mu\nu}(x)$ равен

$$t^{\mu\nu}(x) = \rho u^\mu u^\nu,\ u^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma},$$

$d\sigma$ — интервал в пространстве Минковского.

На основании (λ), используя выражение для $t^{\mu\nu}$, найдем уравнения для геодезической линии в пространстве Минковского

$$\frac{du^\nu}{d\sigma} + \gamma^\nu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0,$$

т.е. мы пришли к обычным уравнениям для свободного движения частиц в СТО в выбранной ранее координации с метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}(x)$. Таким образом, уравнение движения вещества в гравитационном поле в выбранной координации автоматически переходит при выключении гравитационного взаимодействия, т.е. при обращении тензора кривизны Римана в нуль, в уравнение движения вещества в пространстве Минковского в той же координации с метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}(x)$, т.е. принцип соответствия выполняется. Это утверждение в РТГ имеет общий характер, поскольку при обращении тензора Римана в нуль плотность лагранжиана вещества в гравитационном поле $L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A)$ переходит в обычную плотность лагранжиана $L_M(\tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \Phi_A)$ СТО в выбранной координации.

В ОТО уравнение движения вещества также имеет вид (σ). Но поскольку в уравнения Гильберта — Эйнштейна не входит метрический тензор пространства Минковского, то при выключении гравитационного взаимодействия, т.е. при обращении тензора кривизны Римана в нуль, нельзя сказать, в какой системе координат (инерциальной или ускоренной) пространства Минковского мы находимся, а поэтому невозможно определить, какое уравнение движения вещества в пространстве Минковского мы получим при выключении гравитационного взаимодействия. Именно поэтому в ОТО принцип соответствия невозможно соблюсти, оставаясь в рамках этой теории.

В заключение отметим, что в РТГ возрождаются все те понятия (инерциальная система координат, закон инерции, ускорение по отношению к пространству, законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения), которые имеют место в классической механике Ньютона и в специальной теории относительности, от которых А.Эйнштейну пришлось отказаться при построении ОТО. Силы инерции и гравитации даже локально нельзя отождествлять, поскольку они совершенно разной природы. Если первые можно устранить выбором системы координат, то силы гравитации никаким выбором системы координат устранить нельзя.

6. Принцип причинности в РТГ

РТГ построена в рамках СТО подобно теориям других физических полей. Согласно СТО, любое движение какого-либо точечного пробного тела всегда происходит внутри светового конуса причинности пространства Минковского. Следовательно, неинерциальные системы отсчета, реализуемые пробными телами, также должны находиться внутри конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Этим самым определяется весь класс возможных неинерциальных систем отсчета. Локальное равенство трехмерной силы инерции и гравитации при действии на материальную точку будет иметь место, если световой конус эффективного риманова пространства не выходит за пределы светового конуса причинности пространства Минковского. Именно только в этом случае трехмерную силу гравитационного поля, действующую на пробное тело, можно локально скомпенсировать, перейдя в допустимую неинерциальную систему отсчета, связанную с этим телом.

Если бы световой конус эффективного риманова пространства выходил за пределы светового конуса причинности пространства Минковского, то это означало бы, что для такого “гравитационного поля” не существует допустимой неинерциальной системы отсчета, в которой это “силовое поле” при действии на материальную точку можно было бы скомпенсировать. Иными словами, локальная компенсация 3-силы гравитации силой инерции возможна лишь тогда, когда гравитационное поле как физическое поле, воздействуя на частицы, не выводит их мировые линии за пределы конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Данное условие следует рассматривать как принцип причинности, позволяющий отбирать решения системы (76) и (77), которые имеют физический смысл и соответствуют гравитационным полям.

Принцип причинности не выполняется автоматически. Это связано с тем, что гравитационное взаимодействие входит в коэффициенты при вторых производных в уравнениях поля, т.е. изменяет исходную геометрию пространства-времени. Эта особенность присуща только гравитационному полю. Взаимодействие всех других известных физических полей обычно не затрагивает вторых производных уравнений поля, и поэтому не изменяет исходную псевдоевклидову геометрию пространства-времени.

Дадим теперь аналитическую формулировку принципа причинности в РТГ. Поскольку в РТГ движение вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве-времени эквивалентно движению вещества в соответствующем эффективном римановом пространстве-времени, то для причинно-связанных событий (мировых линий частиц и света), с одной стороны, мы должны иметь условие

$$d\,s^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu \;\geq\; 0, \tag{80}$$

а с другой — для таких событий должно обязательно выполняться неравенство

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu \;\geq\; 0. \tag{81}$$

Для выбранной системы отсчета, реализуемой физическими телами, имеет место условие

$$\gamma_{oo} \;>\; 0. \tag{82}$$

В выражении (81) мы выделим времени- и пространственноподобные части

$$d\,\sigma^2 = \left(\sqrt{\gamma_{oo}}\,dt + \frac{\gamma_{o\,i}\,dx^i}{\sqrt{\gamma_{oo}}}\right)^2 - s_{i\,k}\,dx^i\,dx^k, \tag{83}$$

здесь латинские индексы i, k пробегают значения 1, 2, 3;

$$s_{i\,k} = -\,\gamma_{i\,k} + \frac{\gamma_{o\,i}\gamma_{o\,k}}{\gamma_{o\,o}}, \tag{84}$$

$s_{i\,k}$ является метрическим тензором трехмерного пространства в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве-времени. Квадрат пространственного расстояния определяется выражением

$$d\,l^2 = s_{i\,k}\,dx^i\,dx^k. \tag{85}$$

Представим скорость $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ в виде $v^i = ve^i$, где v — величина скорости, e^i — произвольный единичный вектор в трехмерном пространстве

$$s_{i\,k} e^i\, e^k = 1. \tag{86}$$

При отсутствии гравитационного поля скорость света в выбранной системе координат легко определяется из выражения (83), если положить его равным нулю:

$$\left(\sqrt{\gamma_{oo}}\, dt + \frac{\gamma_{oi}\, dx^i}{\sqrt{\gamma_{oo}}}\right)^2 = s_{i\,k}\, dx^i\, dx^k.$$

Отсюда находим

$$v = \sqrt{\gamma_{oo}} \Big/ \left(1 - \frac{\gamma_{oi}\, e^i}{\sqrt{\gamma_{oo}}}\right). \tag{87}$$

Таким образом, произвольный четырехмерный изотропный вектор в пространстве Минковского u^ν равен

$$u^\nu = (1,\, v\, e^i). \tag{88}$$

Для одновременного выполнения условий (80) и (81) необходимо и достаточно, чтобы для любого изотропного вектора

$$\gamma_{\mu\nu}\, u^\mu\, u^\nu = 0 \tag{89}$$

выполнялось условие причинности

$$g_{\mu\nu}\, u^\mu\, u^\nu \;\le\; 0, \tag{90}$$

которое и означает, что световой конус эффективного риманова пространства не выходит за пределы светового конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Условия причинности можно записать в следующей форме:

$$g_{\mu\nu}\, v^\mu\, v^\nu = 0, \tag{89a}$$

$$\gamma_{\mu\nu} v^\mu\, v^\nu \;\ge\; 0. \tag{90a}$$

В ОТО физический смысл имеют такие решения уравнений Гильберта–Эйнштейна, которые удовлетворяют в каждой точке пространства-времени неравенству

$$g < 0,$$

а также требованию, называемому условием энергодоминантности, которое формулируется следующим образом. Для любого времениподобного вектора K_ν должно выполняться неравенство

$$T^{\mu\nu}\, K_\mu\, K_\nu \;\ge\; 0,$$

а величина $T^{\mu\nu}\,K_\nu$ для данного вектора K_ν должна образовывать непространственноподобный вектор.

В нашей теории физический смысл имеют такие решения уравнений $(78a)$ и $(79a)$, которые наряду с этими требованиями должны также удовлетворять условию причинности $(89a)$ и $(90a)$. Последнее на основании уравнения $(78a)$ можно записать в следующей форме:

$$R_{\mu\nu}\,K^\mu K^\nu \;\leq\; \frac{8\,\pi}{\sqrt{-g}}(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,T)\,K^\mu K^\nu+\frac{m^2}{2}\,g_{\mu\nu}\,K^\mu K^\nu. \qquad (91)$$

Если плотность тензора энергии-импульса вещества взять в форме

$$T_{\mu\nu}=\sqrt{-g}[(\rho+p)U_\mu U_\nu-pg_{\mu\nu}],$$

то на основании $(78a)$ можно установить между интервалами пространства Минковского $d\sigma$ и интервалом эффективного риманова пространства ds следующую связь:

$$\frac{m^2}{2}d\sigma^2=ds^2[4\pi(\rho+3p)+\frac{m^2}{2}-R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu],$$

где $U^\mu=\dfrac{dx^\mu}{ds}$.

В силу принципа причинности имеет место неравенство

$$R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu<4\pi(\rho+3p)+\frac{m^2}{2},$$

которое является частным случаем неравенства (91) или

$$\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\,v^\mu v^\nu \;\leq\; 8\,\pi T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu. \qquad (91a)$$

А. Эйнштейн в 1918 году дал принципу эквивалентности следующую формулировку: *“Инерция и тяжесть тождественны; отсюда и из результатов специальной теории относительности неизбежно следует, что симметричный ≪фундаментальный тензор≫ $g_{\mu\nu}$ определяет метрические свойства пространства, движения тел по инерции в нем, а также и действие гравитации”*. Отождествление в ОТО гравитационного поля с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ риманова пространства позволяет с помощью выбора системы координат сделать равными нулю все компоненты символа Кристоффеля во всех точках произвольной линии. Но при этом и в ОТО гравитационное поле выбором системы координат не исключается, поскольку движение двух близких материальных точек не будет свободным из-за наличия тензора кривизны, который в силу тензорных свойств никогда нельзя обратить в нуль путем выбора системы координат.

В РТГ гравитационное поле является физическим полем в духе Фарадея — Максвелла, поэтому сила гравитации описывается четырехвектором, а следовательно, путем выбора системы координат, только при выполнении условий (89) и (90) можно силами инерции уравновесить трехмерную часть силы гравитации. Движение же материальной точки в гравитационном поле, независимо от системы координат, никогда не может быть свободным. Последнее особенно очевидно, если уравнение геодезической записать в форме [8]:

$$\frac{DU^\nu}{d\sigma} = -G^\rho_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta(\delta^\nu_\rho - U^\nu U_\rho).$$

Здесь

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,\, U^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}.$$

Свободное движение в пространстве Минковского описывается уравнением

$$\frac{DU^\nu}{d\sigma} = \frac{dU^\nu}{d\sigma} + \gamma^\nu_{\mu\lambda}U^\mu U^\lambda = 0,$$

где $\gamma^\nu_{\mu\lambda}$ — символы Кристоффеля пространства Минковского.

Мы видим, что движение по геодезической риманова пространства есть движение пробного тела под действием силы

$$F^\nu = -G^\rho_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta(\delta^\nu_\rho - U^\nu U_\rho),$$

причем эта сила есть четырехвектор. Если бы пробное тело было заряженным, то оно излучало бы электромагнитные волны, поскольку оно движется с ускорением. Ситуация здесь точно такая же, какая имеет место и для других известных физических сил.

В СТО между силами инерции и физическими силами (электромагнитными, ядерными и т.д.) имеется принципиальная разница. Силы инерции всегда могут быть обращены в нуль простым выбором системы отсчета, тогда как физические силы никаким выбором системы отсчета в принципе нельзя обратить в нуль, поскольку они имеют векторную природу в пространстве Минковского. Поскольку в РТГ все силы, в том числе и гравитационные, имеют векторную природу, то это означает, что они не могут быть обращены в нуль выбором системы координат. Выбором системы координат можно только скомпенсировать трехмерную силу любой природы, в том числе и гравитационную, силой инерции. В ОТО, как отмечал Дж.Л.Синг [9], “*понятие силы гравитации отсутствует, так как гравитационные свойства органически входят в структуру пространства-времени и проявляются в кривизне пространства-времени, т.е. в том, что тензор Римана* R_{ijkm} *отличен от нуля*”. Именно в этой связи Дж.Л.Синг писал: “*Согласно знаменитой легенде,* *Ньютон был вдохновлен на создание своей теории гравитации, наблюдая однажды за падением яблока с ветки дерева, и изучающие ньютонову физику даже теперь стали бы утверждать, что ускорение (980 см/сек^2) падающего яблока обусловлено гравитационным полем. Согласно теории относительности* (речь идет об ОТО. — *А.Л.), эта точка зрения совершенно ошибочна. Мы предпримем тщательное изучение этой проблемы и убедимся, что в явлении свободного падения гравитационное поле (т.е. тензор Римана) играет, в действительности, чрезвычайно малую роль, а ускорение 980 см/сек^2 обусловлено фактически кривизной мировой линии ветки дерева"*.

Согласно РТГ, гравитационное поле является физическим полем, а поэтому, в отличие от ОТО, она полностью сохраняет понятие силы гравитации. Благодаря силе гравитации и происходит свободное падение тела, т.е. происходит все так, как это имеет место в ньютоновой физике. Более того, все гравитационные эффекты в Солнечной системе (смещение перигелия Меркурия, отклонение света Солнцем, временное запаздывание радиосигнала, прецессия гироскопа) вызваны именно действием силы гравитации, а не тензора кривизны пространства-времени, который в Солнечной системе достаточно мал.

В локальной тождественности инерции и гравитации Эйнштейн увидел главную причину равенства инертной и гравитационной масс. Однако, по нашему мнению, как это видно из уравнений (2), причина этого равенства заключается в том, что источником гравитационного поля является сохраняющаяся суммарная плотность тензора вещества и гравитационного поля. Именно поэтому равенство инертной и гравитационной масс не требует локального отождествления сил гравитации и инерции.

7. ПРИНЦИП МАХА

Ньютон при формулировке законов механики ввел понятие абсолютного пространства, которое остается всегда одинаковым и неподвижным. Именно по отношению к этому пространству он и определял ускорение тела. Это ускорение имело абсолютный характер. Введение такой абстракции, как абсолютное пространство, оказалось чрезвычайно плодотворным. Отсюда, в частности, возникли понятия инерциальных систем отсчета во всем пространстве, принцип относительности для механических процессов и сложилось представление о физически выделенных состояниях движения. Эйнштейн по этому поводу в 1923 г. писал следующее: *"Системы координат, находящиеся в таких состояниях движения, отличаются тем, что сформулированные в этих координатах законы природы принимают наиболее простой вид"*. И далее: *"...согласно классической механике существует относительность скорости, но не относительность ускорения"*. Так утвердилось в теории представление об инерциальных системах отсчета, в которых материальные точки, не подвергающиеся действию сил, не испытывают ускорения и находятся в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения. Однако абсолютное пространство Ньютона или инерциальные системы отсчета введены, фактически, априорно в отрыве от характера распределения материи во Вселенной.

Мах проявил достаточную смелость, подвергнув серьезной критике основные положения механики Ньютона. Как он сам позднее писал, ему с большим трудом удалось опубликовать свои идеи. Хотя Мах и не построил физическую теорию, свободную от указанных им недостатков, он оказал огромное влияние на развитие физической теории. Он привлек внимание ученых к анализу основных физических понятий.

Приведем ряд высказываний Маха [10], которые получили в литературе название принципа Маха: *"Никто не может ничего сказать об абсолютном пространстве и абсолютном движении, это нечто лишь мыслимое, на опыте не обнаружимое"*. И далее: *"Вместо того, чтобы относить движущееся тело к пространству (к какой–нибудь координатной системе), будем рассматривать непосредственно его отношение к телам мира, посредством которых только и можно определить систему координат. ...Даже в простейшем случае, когда мы будто бы рассматриваем взаимодействие только двух масс, невозможно отвлечься от остального мира... . Если тело вращается относительно неба неподвижных звезд, то возникают центробежные силы, а если оно вращается относительно другого тела, а не относительно неба неподвижных звезд, то центробежных сил нет. Я ничего не имею против, чтобы первое вращение назвать абсолютным, если только не забывать, что это не означает ничего другого, кроме вращения относительно неба неподвижных звезд"*.

Поэтому Мах писал: *"...нет необходимости связывать закон инерции с каким-то особым абсолютным пространством. Самый естественный подход настоящего естествоиспытателя таков: сначала рассматривать закон инерции как достаточно приближенный, соотнести его пространственно с неподвижным звездным небом, ... и затем следует ожидать поправок или развития наших знаний на основе дальнейшего опыта. Недавно Ланге опубликовал критическую статью, в которой он излагает, как можно было бы, согласно его принципам, ввести новую систему координат, если бы обычное грубое отнесение к неподвижному звездному небу оказалось больше непригодным вследствие более точных астрономических наблюдений. Между мной и Ланге нет различия во мнениях относительно теоретической формальной ценности заключений Ланге, а именно, что в настоящее время неподвижное звездное небо является единственной практически пригодной системой отсчета, а также относительно метода определения новой системы отсчета посредством постепенных поправок"*. Далее Мах приводит высказывания С.Неймана: *“Так как все движения должны быть отнесены к системе альфа (системе инерции), она, очевидно, представляет некую косвенную связь между всеми процессами, происходящими во Вселенной, и, следовательно, содержит в себе, можно сказать, столь же загадочный, сколь и сложный универсальный закон”.* Мах по этому поводу замечает: *“Я думаю, что с этим согласится всякий”.*

Из высказываний Маха очевидно, что, поскольку речь идет о законе инерции, согласно которому по Ньютону *“...всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения...”*, то, естественно, встает вопрос об инерциальных системах отсчета и об их связи с распределением материи. Мах и его современники вполне ясно понимали, что такая связь должна иметь место в природе. Именно такой смысл далее и будет вкладываться в понятие “принцип Маха”.

Мах писал: *“Хотя я и думаю, что астрономические наблюдения сделают необходимыми сначала лишь очень незначительные поправки, я все же допускаю, что закон инерции в той простой форме, которую ему придал Ньютон, имеет для нас, людей, лишь ограниченное и преходящее значение”.* Как мы увидим далее, в этом Мах не оказался прав. Мах не дал математического оформления своей идеи, а поэтому весьма часто разные авторы вкладывают в принцип Маха свой смысл. Мы здесь пытаемся сохранить тот смысл, который вкладывал в него сам Мах.

Пуанкаре, а затем Эйнштейн обобщили принцип относительности на все физические явления. В формулировке Пуанкаре [11] он звучит так: *“...принцип относительности, согласно которому законы физических явлений должны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа определять, находимся ли мы в подобном движении или нет”.* Применение этого принципа к электромагнитным явлениям привело Пуанкаре, а затем и Минковского к открытию псевдоевклидовой геометрии пространства-времени и тем самым еще в большей степени укрепило гипотезу о существовании инерциальных систем отсчета во всем пространстве. Такие системы отсчета являются физически выделенными, а поэтому ускорение относительно них имеет абсолютный смысл.

В общей теории относительности (ОТО) отсутствуют инерциальные системы отсчета во всем пространстве. Эйнштейн об этом в 1929 г. писал: *“Исходным пунктом теории служит утверждение, что не существует физически выделенного состояния движения, т.е. не только скорость, но и ускорение не имеет абсолютного смысла”.*

Принцип Маха в его формулировке в ОТО оказался невостребованным. Следует, однако, отметить, что представления об инерциальных системах отсчета во всем пространстве имеют достаточно весомую экспериментальную основу, поскольку, например, переходя от системы координат, связанной с Землей, к системе координат, связанной с Солнцем, а затем к Метагалактике, мы все с большей точностью приближаемся к инерциальной системе отсчета. Поэтому нет никаких серьезных оснований для отказа от такого важного понятия, как инерциальная система отсчета. С другой стороны, наличие фундаментальных законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения также с необходимостью приводит к существованию инерциальных систем отсчета во всем пространстве. Псевдоевклидова геометрия пространства-времени отражает общие динамические свойства материи и в то же время вводит инерциальные системы отсчета. Хотя псевдоевклидова геометрия пространства-времени возникла при изучении материи, а поэтому и неотделима от нее, тем не менее можно формально говорить о пространстве Минковского в отсутствие материи. Однако, так же, как и ранее в механике Ньютона, в специальной теории относительности нет ответа на вопрос, как инерциальные системы отсчета связаны с распределением материи во Вселенной.

Открытие псевдоевклидовой геометрии пространства и времени позволило с единой точки зрения рассмотреть не только инерциальные, но и ускоренные системы отсчета. Большая разница проявилась между силами инерции и силами, вызванными физическими полями. Она состоит в том, что силы инерции всегда можно сделать равными нулю, путем выбора соответствующей системы отсчета, тогда как силы, вызванные физическими полями, в принципе нельзя обратить в нуль выбором системы отсчета, так как они имеют векторную природу в четырехмерном пространстве-времени. Поскольку в РТГ гравитационное поле является физическим полем в духе поля Фарадея — Максвелла, силы, вызванные таким полем, не могут быть обращены в нуль выбором системы отсчета.

Другая ситуация имеет место в общей теории относительности. Гравитационные силы в ней не имеют векторной природы в четырехмерном пространстве и времени, а поэтому они могут быть локально обращены в нуль выбором системы отсчета. Основные уравнения РТГ (76) и (77) благодаря наличию массы покоя гравитационного поля содержат, наряду с римановой метрикой, также метрический тензор пространства Минковского, но это означает, что в принципе метрику этого пространства можно выразить через геометрические характеристики эффективного риманова пространства, а также через величины, характеризующие распределение вещества во Вселенной. Это легко осуществить, перейдя в уравнениях (76) от контравариантных величин к ковариантным. Таким путем мы получим

$$\frac{m^2}{2}\,\gamma_{\mu\nu}(x) = \frac{8\,\pi}{\sqrt{-g}}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,T) - R_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\,g_{\mu\nu}\,. \tag{92}$$

Отсюда мы видим, что в правой части уравнений содержатся только геометрические характеристики эффективного риманова пространства и величины, определяющие распределение вещества в этом пространстве.

Экспериментально изучая движения частиц, света в римановом пространстве, в принципе можно найти метрический тензор пространства Минковского, а следовательно, и построить инерциальную систему отсчета. Таким образом, РТГ, построенная в рамках специальной теории относительности, позволяет дать математическую формулировку принципа Маха. Мы видим, что специальный принцип относительности имеет всеобщее значение независимо от вида материи.

Для гравитационного поля его требования выражаются в условии форминвариантности уравнений (76) и (77) относительно группы Лоренца. Лоренц-форминвариантность физических уравнений остается важнейшим физическим принципом при построении теории, поскольку именно этот принцип дает возможность ввести универсальные характеристики для всех форм материи.

А. Эйнштейн в работе 1950 г. писал: *“...не следует ли в конце концов попробовать сохранить понятие инерциальной системы, оставив все попытки объяснить фундаментальную черту гравитационных явлений, которая проявляет себя в системе Ньютона как эквивалентность инертной и тяготеющей масс?”* В РТГ сохранено понятие инерциальной системы и в то же время показано, что эквивалентность инертной и тяготеющей масс есть прямое следствие гипотезы, что сохраняющаяся плотность тензора энергии-импульса материи является источником гравитационного поля. Таким образом, равенство инертной и тяготеющей масс ни в коей мере не противоречит существованию инерциальной системы координат. Более того, эти положения органически дополняют друг друга и лежат в основе РТГ.

В противоположность нашему выводу А.Эйнштейн на поставленный им вопрос ответил следующим образом: “*Тот, кто верит в постижимость природы, должен дать ответ — нет*”. Наличие инерциальных систем координат позволяет устранить парадокс Маха, ибо только в этом случае можно говорить об ускорении относительно пространства. В.А.Фок по этому поводу писал: “*Что касается парадокса Маха, то он основан, как известно, на рассмотрении вращающегося жидкого тела, имеющего форму эллипсоида, и невращающегося, имеющего форму шара. Парадокс возникает здесь только в том случае, если считать лишенным смысла понятие “вращение по отношению к пространству”; тогда действительно оба тела (вращающееся и невращающееся) представляются равноправными, и становится непонятным, почему одно из них шаровидно, а другое — нет. Но парадокс исчезает, коль скоро мы признаем законность понятия “ускорения по отношению к пространству*”.

Идеи Маха оказали глубокое влияние на взгляды Эйнштейна на гравитацию при построении общей теории относительности. В одной из работ Эйнштейн пишет: *"Принцип Маха: G-поле полностью определено массами тел"*. Но оказывается, что в ОТО и это положение не выполняется, поскольку имеются решения и в отсутствие материи. Попытка устранения этого обстоятельства путем введения λ-члена не дала желаемого результата. Оказалось, что и уравнения с λ-членом в отсутствие материи также имеют решения, отличные от нуля. Мы видим, что Эйнштейн вложил в понятие "принцип Маха" совсем другой смысл. Но и в таком понимании принцип Маха не нашел своего места в ОТО.

Имеет ли место принцип Маха в формулировке Эйнштейна в РТГ? В отличие от ОТО в этой теории в силу принципа причинности имеются пространственноподобные поверхности во всем пространстве (глобальные поверхности Коши). И если на одной из таких поверхностей вещество отсутствует, то на основании требования энергодоминантности, налагаемого на тензор вещества, оно будет отсутствовать всегда [12]. Поскольку вещество в природе существует, то отсюда следует, что система однородных во всем пространстве гравитационных уравнений не имеет решений, реализуемых в природе. Иначе говоря, все решения этой системы не имеют физического смысла при данном развитии Вселенной. Такое отбрасывание решений системы однородных гравитационных уравнений стало возможным не только в силу уравнений, но прежде всего благодаря характеру реальной Вселенной.

В принципе уравнения теории не отвергают вселенные, построенные из гравитационного поля, без вещества. Они отвергнуты самим развитием материи. Почему наша Вселенная оказалась с веществом — теория пока не дает ответа. Физический смысл имеют решения только системы неоднородных гравитационных уравнений, когда в какой-либо части пространства или во всем пространстве имеется вещество. Это означает, что гравитационное поле и эффективное риманово пространство в реальной Вселенной не могли возникнуть без порождающего их вещества. Мы видим, что и в формулировке Эйнштейна принцип Маха реализуется в релятивистской теории гравитации.

Имеется, однако, существенное различие в понимании G-поля в нашей теории и в ОТО. Под G-полем Эйнштейн понимал риманову метрику, тогда как в нашем представлении гравитационное поле есть физическое поле. Такое поле входит в риманову метрику наряду с плоской метрикой, а поэтому при отсутствии вещества и гравитационного поля метрика не исчезает, а остается метрикой пространства Минковского.

В литературе имеются и другие формулировки принципа Маха, отличные по смыслу от идей Маха и Эйнштейна, но поскольку они, по нашему мнению, не сформулированы достаточно определенно, мы их не рассматривали. Так как гравитационные силы в РТГ обязаны физическому полю типа Фарадея — Максвелла, то ни о какой единой сущности сил инерции и гравитации, в принципе, не может быть и речи.

Иногда суть принципа Маха видят в том, что, якобы, согласно ему силы инерции определяются взаимодействием с материей Вселенной. С полевой точки зрения такой принцип не может иметь место в природе. Дело здесь в том, что, хотя инерциальные системы отсчета, как мы видели выше, связаны с распределением материи во Вселенной, силы инерции не являются результатом взаимодействия с материей Вселенной, поскольку всякое воздействие материи возможно только через физические поля, но это означает, что силы, вызванные этими полями, в силу их векторной природы нельзя обратить в нуль выбором системы отсчета. Таким образом, силы инерции непосредственно определяются не физическими полями, а строго определенной структурой геометрии и выбором системы отсчета.

Псевдоевклидова геометрия пространства-времени, отражая динамические свойства, общие для всех форм материи, с одной стороны, подтвердила гипотезу о существовании инерциальных систем отсчета, а с другой — показала, что силы инерции, возникающие при соответствующем выборе системы отсчета, выражаются через символы Кристоффеля пространства Минковского. Поэтому они не зависят от природы тела. Все это стало ясно, когда было показано, что специальная теория относительности применима не только в инерциальных системах отсчета, но и в неинерциальных (ускоренных).

Это позволило в работе [5] дать принципу относительности более общую формулировку: *"Какую бы физическую систему отсчета мы ни избрали (инерциальную или неинерциальную), всегда можно указать бесконечную совокупность других систем отсчета, таких, в которых все физические явления протекают одинаково с исходной системой отсчета, так что мы не имеем и не можем иметь никаких экспериментальных возможностей различить, в какой именно системе отсчета из этой бесконечной совокупности мы находимся".* Математически это выражается так: пусть в некоторой системе координат пространства Минковского интервал равен

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu,$$

тогда существует другая система координат x':

$$x'^\nu = f^\nu(x),$$

в которой интервал принимает форму

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu,$$

где метрические коэффициенты $\gamma_{\mu\nu}$ имеют тот же функциональный вид, что и в исходной системе координат.

В этом случае говорят, **что метрика форминвариантна** относительно таких преобразований, а все **физические уравнения также форминвариантны**, т.е. имеют одинаковый вид как в штрихованной, так и в нештрихованной системе координат. Преобразования координат, оставляющие метрику форминвариантной, образуют группу. В случае галилеевых координат в инерциальной системе это обычные преобразования Лоренца.

В РТГ между силами инерции и гравитации имеется существенное различие в том, что по мере удаления от тел гравитационное поле становится достаточно слабым, тогда как силы инерции в зависимости от выбора системы отсчета могут быть сколь угодно большими. И только в инерциальной системе отсчета они равны нулю. Поэтому неправильно считать, что силы инерции нельзя отделить от сил гравитации. В повседневной жизни их различие почти очевидно.

Построение РТГ позволило установить связь инерциальной системы отсчета с распределением материи во Вселенной и тем самым глубже понять природу сил инерции и их различие с материальными силами. В нашей теории силам инерции отведена такая же роль, какую они играют в любых других полевых теориях.

8. ПОСТНЬЮТОНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Для изучения гравитационных эффектов в Солнечной системе вполне достаточно постньютоновского приближения. В данном разделе мы построим это приближение. Наше построение в техническом плане использует многое, ранее полученное В.А.Фоком [13].

Основные уравнения теории запишем в форме (см. Приложение В)

$$\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} + m^2\sqrt{-\gamma}\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} = -16\pi g(T_M^{\epsilon\lambda} + \tau_g^{\epsilon\lambda}) \tag{93}$$

$$D_\lambda \tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} = 0\,. \tag{94}$$

где $T_M^{\epsilon\lambda}$ — тензор энергии-импульса вещества и $\tau_g^{\epsilon\lambda}$ — тензор энергии-импульса гравитационного поля.

Выражение для тензора энергии-импульса гравитационного поля может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
- \quad & 16\pi\tau_g^{\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}(\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta})(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\mu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\tau\sigma}\tilde{g}_{\nu\mu})D_\alpha\tilde{\Phi}^{\tau\sigma}\cdot D_\beta\tilde{\Phi}^{\mu\nu} + \\
+ \quad & \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\epsilon\tau}\cdot D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\sigma} - \tilde{g}^{\epsilon\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\lambda\sigma}\cdot D_\beta\tilde{\Phi}^{\alpha\tau} - \\
- \quad & \tilde{g}^{\lambda\alpha}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\beta\sigma}\cdot D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\tau} + \\
+ \quad & \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\sigma\beta}\cdot D_\beta\tilde{\Phi}^{\alpha\tau} + D_\alpha\tilde{\Phi}^{\epsilon\beta}\cdot D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\alpha} - \tilde{\Phi}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} \\
- \quad & m^2(\sqrt{-g}\tilde{g}^{\epsilon\lambda} - \sqrt{-\gamma}\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} + \tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta})\,.
\end{aligned} \tag{95}$$

Это выражение записано в произвольной координатной системе в пространстве Минковского. В дальнейшем все вычисления будут проводиться в галилеевых координатах инерциальной системы.

$$\gamma_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)\ . \tag{96}$$

При построении ряда теории возмущений в качестве малого параметра естественно использовать величину, равную

$$v \sim \epsilon,\ U \sim \epsilon^2,\ \Pi \sim \epsilon^2,\ p \sim \epsilon^2\ . \tag{97}$$

Здесь U — ньютонов потенциал гравитационного поля;

Π — удельная внутренняя энергия тела;

p — удельное давление.

Для Солнечной системы параметр ϵ^2 имеет порядок

$$\epsilon^2 \sim 10^{-6}\ . \tag{98}$$

Будем исходить из разложений компонент плотности тензора:

$$\tilde{g}^{00} = 1 + \overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} + \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} + \ldots \tag{99}$$

$$\tilde{g}^{0i} = \overset{(3)}{\tilde{\Phi}}{}^{0i} + \overset{(5)}{\tilde{\Phi}}{}^{0i} + \ldots \tag{100}$$

$$\tilde{g}^{ik} = \tilde{\gamma}^{ik} + \overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{ik} + \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{ik} + \ldots \tag{101}$$

В качестве модели вещества возьмем идеальную жидкость, тензор энергии-импульса которой имеет вид

$$T^{\epsilon\lambda} = [p + \rho(1+\Pi)]u^\epsilon u^\lambda - p g^{\epsilon\lambda}, \tag{102}$$

где ρ — инвариантная плотность идеальной жидкости, p — удельное изотропное давление, u^λ — четырехвектор скорости.

Напишем теперь разложение по малому параметру ϵ для тензора энергии-импульса вещества:

$$T_M^{00} = \overset{(0)}{T}{}^{00} + \overset{(2)}{T}{}^{00} + \ldots \tag{103}$$

$$T_M^{0i} = \overset{(1)}{T}{}^{0i} + \overset{(3)}{T}{}^{0i} + \ldots \tag{104}$$

$$T_M^{ik} = \overset{(2)}{T}{}^{ik} + \overset{(4)}{T}{}^{ik} + \ldots\ . \tag{105}$$

В ньютоновом приближении, т.е. когда пренебрегаем силами гравитации, для четырехвектора скорости имеем

$$u^0 = 1 + 0(\epsilon^2),\ u^i = v^i(1 + 0(\epsilon^2))\ . \tag{106}$$

Используя эти выражения в (102), найдем

$$\overset{(0)}{T}{}^{00} = \rho,\ \overset{(1)}{T}{}^{0i} = \rho v^i,\ \overset{(0)}{T}{}^{ik} = 0\ . \tag{107}$$

В этом приближении имеем

$$\partial_0 \rho + \partial_i(\rho v^i) = 0\ . \tag{108}$$

Отсюда видно, что в ньютоновом приближении полная инертная масса тела является сохраняющейся величиной:

$$M = \int \rho d^3x\ . \tag{109}$$

В ньютоновом приближении на основании уравнений (93) имеем

$$\Delta\ \overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} = -16\pi\rho\ , \tag{110}$$

$$\Delta\ \overset{(3)}{\tilde{\Phi}}{}^{0i} = -16\pi\rho v^i\ , \tag{111}$$

$$\Delta\ \overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{ik} = 0\ . \tag{112}$$

Масса гравитона, ввиду малости, в инерциальной системе координат для эффектов Солнечной системы не играет роли, а поэтому мы при получении уравнений (110)—(112) ее не учитывали. Следует отметить, что в общем случае неинерциальной системы отсчета или для сильных гравитационных полей член с массой гравитона m опускать уже нельзя. Так, например, даже для статического тела в области, близкой к сфере Шварцшильда, влияние массы гравитона весьма велико, поэтому пренебрегать ею уже невозможно.

Решение уравнений (110)—(112) имеет вид

$$\overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} = 4U,\ U = \int \frac{\rho}{|x - x'|} d^3x', \tag{113}$$

$$\overset{(3)}{\tilde{\Phi}}{}^{0i} = -4V^i,\ V^i = -\int \frac{\rho v^i}{|x - x'|} d^3x'\ , \tag{114}$$

$$\overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{ik} = 0\ . \tag{115}$$

На основании уравнений (94) имеем

$$\partial_0 \overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} + \partial_i \overset{(3)}{\tilde{\Phi}}{}^{0i} = 0\ . \tag{116}$$

Подставляя в это уравнение (113) и (114), найдем

$$\partial_0 U - \partial_i V^i = 0\ . \tag{117}$$

Отсюда очевидно, что при дифференцировании потенциала U по времени порядок малости по ϵ увеличивается. Это обстоятельство в дальнейшем нами будет использоваться при вычислениях тензора энергии-импульса гравитационного поля $\tau_g^{\epsilon\lambda}$. Заметим, что уравнение (117) тождественно выполняется в силу уравнений (108).

На основании (114) и (115) следует, что из всех компонент плотности тензора $\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}$ во втором приближении остается только одна компонента $\overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00}$, определяемая выражением (113). Именно это обстоятельство существенно упрощает метод нахождения постньютоновского приближения, когда мы на каждом этапе построения пользуемся плотностями тензорных величин.

Используя (113)—(115) с точностью до второго порядка включительно, получаем

$$\sqrt{-g}g^{00} = 1 + 4U,\ \sqrt{-g}g^{11} = \sqrt{-g}g^{22} = \sqrt{-g}g^{33} = -1\ . \tag{118}$$

Отсюда имеем

$$-g = 1 + 4U\ , \tag{118a}$$

следовательно,

$$g_{00} = 1 - 2U,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -(1 + 2U)\ . \tag{119}$$

Мы видим из (118), что в ньютоновом приближении, когда можно ограничиться только одной компонентой плотности тензора вещества T^{00}, как этого и следовало ожидать, гравитационное поле описывается только одной компонентой $\tilde{\Phi}^{00}$, тогда как метрический тензор $g_{\mu\nu}$ имеет и в этом приближении, согласно (119), несколько компонент. Работа с компонентами поля $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$, а не с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, в значительной степени упрощает весь вычислительный процесс построения постньютоновского приближения. Именно поэтому введение плотности тензора гравитационного поля $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$ имеет не только общетеоретическое, но и практическое значение. Итак, метрический тензор эффективного риманова пространства равен

$$g_{00} = 1 - 2U,\ g_{0i} = 4\gamma_{ik}V^k,\ g_{ik} = \gamma_{ik}(1 + 2U)\ . \tag{120}$$

Из выражения (113) для U следует, что инертная масса (109) равна активной гравитационной массе. В РТГ, как мы видели, это равенство возникло из-за того, что источником гравитационного поля является тензор энергии-импульса.

Перейдем теперь к построению следующего приближения для компоненты метрического тензора g_{00}. С этой целью найдем вклад от тензора энергии-импульса гравитационного поля. Поскольку в выражении (95) под знаком производной необходимо учитывать только $\overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00}$, то первый член (95) даст вклад, равный

$$2(\mathrm{grad}\, U)^2, \tag{121}$$

а второй

$$-16(\mathrm{grad}\, U)^2. \tag{122}$$

Вклад от всех остальных членов в этом приближении будет равен нулю. Отброшены также члены с производными по времени от потенциала U, поскольку в силу (117) они также более высокого порядка малости по ϵ. На основании (121) и (122) имеем

$$-16\pi g\tau_g^{00} = -14(\mathrm{grad}\, U)^2 \ . \tag{123}$$

С учетом (123) уравнение (93) в этом приближении для компоненты $\tilde{\Phi}^{00}$ принимает вид

$$\Delta\tilde{\Phi}^{00} = 16\pi g T^{00} + 14(\mathrm{grad}\, U)^2 + 4\partial_0^2 U \ . \tag{124}$$

Поскольку на основании (120) во втором порядке по ϵ интервал равен

$$ds = dt(1 - U + \frac{1}{2}v_i v^i) \ , \tag{125}$$

отсюда получим

$$u^0 = \frac{dt}{ds} = 1 + U - \frac{1}{2}v_i v^i \ . \tag{126}$$

Подставляя это выражение в (102), найдем

$$\overset{(2)}{T}{}^{00} = \rho[2U + \Pi - v_i v^i] \ . \tag{127}$$

На основании (118a) и (127) из уравнений (124) получим

$$\Delta \ \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} = -96\pi\rho U + 16\pi\rho v_i v^i + 14(\mathrm{grad}\, U)^2 - 16\pi\rho\Pi + 4\partial_0^2 U \ . \tag{128}$$

Воспользуемся очевидным тождеством

$$(\mathrm{grad}\, U)^2 = \frac{1}{2}\Delta U^2 - U\Delta U \ . \tag{129}$$

Но поскольку

$$\Delta U = -4\pi\rho\ , \tag{130}$$

то уравнение (128), после использования (129) и (130), принимает вид

$$\Delta(\overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} - 7U^2) = 16\pi\rho v_i v^i - 40\pi\rho U - 16\pi\rho\Pi + 4\partial_0^2 U\ . \tag{131}$$

Отсюда имеем

$$\overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} = 7U^2 + 4\Phi_1 + 10\Phi_2 + 4\Phi_3 - \frac{1}{\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x-x'|} d^3x'\ , \tag{132}$$

где

$$\Phi_1 = -\int \frac{\rho v_i v^i}{|x-x'|} d^3x',\ \Phi_2 = \int \frac{\rho U}{|x-x'|} d^3x',\ \Phi_3 = \int \frac{\rho\Pi}{|x-x'|} d^3x'. \tag{133}$$

Итак, в постньютоновом приближении находим

$$\tilde{g}^{00} = 1 + 4U + 7U^2 + 4\Phi_1 + 10\Phi_2 + 4\Phi_3 - \frac{1}{\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x-x'|} d^3x'. \tag{134}$$

Нам необходимо теперь найти величину детерминанта g в постньютоновом приближении. Для этой цели представим $\tilde{g}^{ik}$ в форме

$$\tilde{g}^{ik} = \tilde{\gamma}^{ik} + \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{ik}. \tag{135}$$

Следует особо подчеркнуть, что вычисление детерминанта g наиболее просто осуществить, если воспользоваться для этой цели плотностью тензора $\tilde{g}^{\mu\nu}$ и учесть, что

$$g = det(\tilde{g}^{\mu\nu}) = det(g_{\mu\nu})\ . \tag{136}$$

На основании (134) и (135) найдем

$$\sqrt{-g} = 1 + 2U + \frac{3}{2}U^2 + 2\Phi_1 + 5\Phi_2 + 2\Phi_3 - \frac{1}{2}\Phi - \frac{1}{2\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x-x'|} d^3x'. \tag{137}$$

Здесь

$$\Phi = \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{11} + \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{22} + \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{33}. \tag{138}$$

Так как в рассматриваемом приближении $g_{00}g^{00} = 1$, то из выражений (134) и (137) получим

$$g_{00} = 1 - 2U + \frac{5}{2}U^2 - 2\Phi_1 - 5\Phi_2 - 2\Phi_3 - \frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{2\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x-x'|} d^3x'. \tag{139}$$

Для определения g_{00} нам необходимо вычислить величину Φ. Поскольку Φ получена суммированием, то можно воспользоваться уравнением (93) и путем суммирования непосредственно получить уравнения для функции Φ.

Из выражения (95) путем суммирования получим из первого члена следующее выражение:

$$-16\pi g \tau_g^{ii} = -2(\operatorname{grad} U)^2. \tag{140}$$

Все остальные члены, входящие в выражение (95), в данном приближении не дают вклада. С помощью выражения (102) для тензора энергии-импульса вещества найдем

$$-16\pi g \overset{(2)}{\tilde{T}^{ii}} = -16\pi\rho v_i v^i + 48\pi p\ . \tag{141}$$

Учитывая (140) и (141), уравнение для Φ запишем в форме

$$\Delta\Phi = 16\pi\rho v_i v^i - 48\pi p + 2(\operatorname{grad} U)^2. \tag{142}$$

Воспользовавшись тождеством (129) и уравнением (130), получим

$$\Delta(\Phi - U^2) = 16\pi\rho v_i v^i + 8\pi\rho U - 48\pi p\ . \tag{143}$$

Отсюда находим

$$\Phi = U^2 + 4\Phi_1 - 2\Phi_2 + 12\Phi_4,\ \Phi_4 = \int \frac{p}{|x - x'|} d^3x'. \tag{144}$$

Подставляя выражение (144) в (139), имеем

$$g_{00} = 1 - 2U + 2U^2 - 4\Phi_1 - 4\Phi_2 - 2\Phi_3 - 6\Phi_4 + \frac{1}{2\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x - x'|} d^3x'. \tag{145}$$

Используя тождество

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{U}{|x - x'|} d^3x' = -\int \rho |x - x'| d^3x',$$

выражение (145) запишем в форме

$$g_{00} = 1 - 2U + 2U^2 - 4\Phi_1 - 4\Phi_2 - 2\Phi_3 - 6\Phi_4 - \partial_0^2 \int \rho |x - x'| d^3x'. \tag{146}$$

Если совершить преобразование

$$x'^0 = x^0 + \eta^0(x),\ x'^i = x^i\ , \tag{147}$$

то метрические коэффициенты изменятся следующим образом:

$$g'_{00} = g_{00} - 2\partial_0\eta^0,\ g'_{0i} = g_{0i} - \partial_i\eta^0,\ g'_{ik} = g_{ik}\ . \tag{148}$$

Следует отметить, что преобразование (147) не выводит нас из инерциальной системы отсчета, поскольку такое преобразование есть не что иное, как другой выбор часов. Все физически измеряемые величины не зависят от этого выбора.

Принимая функцию η^0 равной

$$\eta^0 = -\frac{1}{2}\partial_0 \int \rho|x - x'|d^3x' \tag{149}$$

и учитывая тождество

$$\partial_i\eta^0 = \frac{1}{2}(\gamma_{ik}V^k - N_i),\ N_i = \int \frac{\rho v^k(x_k - x'_k)(x_i - x'_i)}{|x - x'|^3}d^3x', \tag{150}$$

после подстановки в (148) выражений (120) для g_{0i} и g_{ik}, а также выражения (146) для g_{00} с учетом (149) и (150) найдем метрические коэффициенты эффективного риманова пространства в так называемой “канонической форме”:

$$\begin{array}{rcl} g_{00} & = & 1 - 2U + 2U^2 - 4\Phi_1 - 4\Phi_2 - 2\Phi_3 - 6\Phi_4, \\ g_{0i} & = & \dfrac{7}{2}\gamma_{ik}V^k + \dfrac{1}{2}N_i, \\ g_{ik} & = & \gamma_{ik}(1 + 2U)\ . \end{array} \tag{151}$$

На основании выражений (151) постньютоновские параметры Нордтведта — Уилла в РТГ равны следующим значениям:

$$\gamma = 1,\ \beta = 1,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_W = 0.$$

Метрические коэффициенты (151) вычислены нами в РТГ в инерциальной системе отсчета. Приведем теперь выражения для компонент тензора энергии-импульса вещества, по сравнению с (107), в следующем приближении. Учитывая выражение (126) для u^0, а также

$$u^i = \frac{dx'}{ds} = v^i(1 + U - \frac{1}{2}v_k v^k)\ , \tag{152}$$

из формулы (102) находим

$$\overset{(3)}{T}{}^{0i} = \rho v^i(2U + \Pi - v_k v^k) + pv^i, \tag{153}$$

$$\overset{(2)}{T}{}^{ik} = \rho v^i v^k - p\gamma^{ik}. \tag{154}$$

Компонента $\overset{(2)}{T}{}^{00}$ определяется выражением (127). На основании выражений (151), используя уравнения геодезической линии, можно рассчитать все эффекты в Солнечной системе.

В заключение остановимся несколько подробнее на сравнении РТГ и ОТО при анализе эффектов в слабом гравитационном поле. Система уравнений (93) и (94) вместе с уравнением состояния определяет все физические величины той или иной гравитационной задачи. Все проведенные выше расчеты постньютоновского приближения сделаны в инерциальной системе координат. В ОТО в принципе не существует инерциальной системы. А.Эйнштейн по этому поводу писал: *"Исходным пунктом теории служит утверждение, что не существует физически выделенного состояния движения, т.е. не только скорость, но и ускорение не имеют абсолютного смысла"*. Но если отсутствует инерциальная система координат, то к какой системе отсчета следует относить вычисления, проведенные в ОТО?

В.А.Фок при расчете гравитационных эффектов пользовался гармоническими условиями в декартовых координатах. Он называл их координатными условиями. Так, в работе 1939 года [13] он писал: *"При решении уравнений Эйнштейна мы пользовались координатной системой, которую мы называли гармонической, но которая заслуживает названия инерциальной"*. Далее в этой же статье он отмечал: *"Нам кажется, что возможность введения в общей теории относительности однозначным образом определенной инерциальной координатной системы заслуживает быть отмеченной"*. И, наконец, в работе [14] он писал: *"Принцип относительности, выражаемый преобразованиями Лоренца, возможен и в неоднородном пространстве, общий же принцип относительности невозможен"*.

Все эти высказывания В.А.Фока были продиктованы стремлением внести ясность в физическую суть ОТО, освободив ее от не имеющей физического смысла общей относительности. Однако при этом В.А.Фок фактически вышел за пределы ОТО. Именно благодаря такому выходу он и пришел к поразительному утверждению о справедливости принципа относительности в неоднородном пространстве. Но чтобы это осуществить, необходимо ввести представления о гравитационном поле в пространстве Минковского. Где же В.А.Фок совершил выход из ОТО? При использовании гармонических условий он ввел декартовы координаты:

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0\ , \tag{155}$$

где x^μ — декартовы координаты.

В декартовых координатах $\gamma(x) = \det \gamma_{\mu\nu} = -1$.

Поэтому согласно тензорному закону преобразований имеем

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \cdot \frac{\tilde{g}^{\alpha\beta}(y)}{\sqrt{-\gamma(y)}}\ . \tag{156}$$

Запишем уравнение (155) в форме

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{\partial y^\tau}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial y^\tau} \; . \tag{157}$$

Для дальнейших вычислений приведем формулы

$$\frac{\partial}{\partial y^\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \gamma^\lambda_{\tau\lambda}, \;\; \gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \cdot \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\sigma} \; . \tag{158}$$

После подстановки (156) в (157) с учетом (158) получим

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\sigma}}{\partial y^\alpha} + \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = 0 \; . \tag{159}$$

Множитель второго члена запишем в форме

$$\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \cdot \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\tau} \cdot \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \cdot \gamma^\sigma_{\alpha\beta} \; .$$

Подставляя это выражение в предыдущее, найдем

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \left(\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\sigma}}{\partial y^\alpha} + \gamma^\sigma_{\alpha\beta} \tilde{g}^{\alpha\beta} \right) = 0 \; ,$$

т.е. имеем

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} D_\mu \tilde{g}^{\mu\sigma} = 0 \; . \tag{160}$$

Итак, мы установили, что плотность тензора $\tilde{g}^{\mu\sigma}(y)$ в произвольных координатах автоматически удовлетворяет общековариантному уравнению

$$D_\lambda \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0 \; ,$$

если исходное условие гармоничности (155) записано в декартовых координатах. Но это означает, что условие гармоничности является не координатным условием, а полевым уравнением в пространстве Минковского. Таким образом, использование гармонического условия в декартовых координатах не является невинной операцией, а предполагает выход за рамки ОТО путем введения пространства Минковского.

Пытался ли В.А.Фок рассматривать гравитационное поле в пространстве Минковского? Нет, он был далек от этой мысли и писал об этом [13]:*“Мы упоминаем здесь о ней только в связи с наблюдаемым иногда стремлением (которого отнюдь не разделяем) уложить теорию тяготения в рамки евклидова пространства”*. Как мы видели, использование гармонических условий в декартовых координатах выводит нас за рамки ОТО. Но это означает, что система уравнений гравитации, которую изучал В.А.Фок, отличается от системы уравнений ОТО, т.е. теория гравитации В.А.Фока, основанная на гармонических условиях в декартовых координатах, и ОТО Эйнштейна — это различные теории. Подход В.А.Фока оказался ближе к представлениям РТГ. Все то, что В.А.Фок стремился внести в теорию гравитации (инерциальные системы, ускорение относительно пространства) полностью содержится в РТГ, но в последней это достигается путем рассмотрения гравитационного поля, как и всех других физических полей в пространстве Минковского. При этом все геометрические характеристики риманова пространства уже являются полевыми величинами в пространстве Минковского.

При анализе гравитационных эффектов в Солнечной системе В.А.Фок фактически пользовался пространством Минковского, поскольку все вычисленные гравитационные эффекты он относил к инерциальной системе координат. Именно это обстоятельство и позволило ему получить правильные выражения для эффектов. Так, например, он писал [14]: *"Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты x_1, x_2, x_3? Нам представляется единственно правильным второе определение. Фактически мы им и пользовались, когда говорили о том, что луч света вблизи Солнца имеет форму гиперболы"*, и далее по поводу *"соображения, что прямая, как луч света, более непосредственно наблюдаема, то оно не имеет никакого значения: в определениях решающим является не непосредственная наблюдаемость, а соответствие природе, хотя бы это соответствие и устанавливалось путем косвенных умозаключений"*.

При вычислении в ОТО эффектов гравитации (например: отклонение луча света, временное запаздывание радиосигнала) необходимо сравнивать движение света и радиосигнала по геодезической линии риманова пространства с их движением в отсутствие гравитационного поля. Именно так и должен определяться гравитационный эффект. Но так как в ОТО нельзя сказать, в какой системе координат (инерциальной или неинерциальной) мы оказались при выключении гравитационного поля, то такое сравнение в принципе неоднозначно [15]. В.А.Фок эту трудность преодолел с помощью гармонических условий в декартовых координатах. Но именно это и вывело его за пределы ОТО.

В РТГ гравитационные эффекты определяются однозначно, поскольку согласно уравнениям (93) и (94), записанным в галилеевых координатах инерциальной системы, движение света или пробного тела при выключении гравитационного поля действительно происходит по прямой линии, являющейся геодезической в пространстве Минковского. Совершенно очевидно, что в неинерциальной системе координат геодезическая линия в пространстве Минковского уже не будет прямой линией. Но это означает, что в РТГ в неинерциальной системе координат для нахождения гравитационного эффекта движение в эффективном римановом пространстве необходимо сравнивать именно с этим движением.

При вычислении эффектов гравитации в Солнечной системе, когда влиянием массы гравитона можно пренебречь, система уравнений (93) и (94) РТГ в галилеевых координатах совпадает с системой уравнений, которую решал В.А.Фок. Поэтому постньютоновское приближение (151) в РТГ совпадает с аналогичным приближением в теории гравитации В.А.Фока. Как мы уже отмечали ранее, гармонические условия в декартовых координатах, которые с успехом использовал В.А.Фок, вывели его за рамки ОТО Эйнштейна. Это обстоятельство в свое время отмечал Л.Инфельд, который в 1957 году писал:*"Тем самым для Фока выбор гармонического координатного условия становится некоторым фундаментальным законом природы, изменяющим сам характер эйнштейновской общей теории относительности и превращающим ее в теорию гравитационного поля, справедливую только в инерциальных системах координат"*. Однако в ОТО и без использования гармонических условий в декартовых координатах, тем не менее, также получают аналогичные выражения для постньютоновского приближения. В чем же дело? Причина состоит в том, что опять вводится пространство Минковского в галилеевых координатах и фактически гравитационное поле рассматривается как физическое поле в этом пространстве.

В качестве нулевого приближения для римановой метрики берется метрика пространства Минковского в галилеевых координатах. К ней добавляются различные потенциалы с произвольными постньютоновскими параметрами, каждый из которых убывает как $0(\frac{1}{r})$. Именно в этом пункте гравитация рассматривается как физическое поле в пространстве Минковского, поведение которого описывается введенными гравитационными потенциалами. Такое требование к характеру поведения метрики риманова пространства не следует из ОТО, поскольку в общем случае асимптотика метрики весьма произвольна и даже зависит от выбора трехмерных пространственных координат.

Подставляя риманову метрику $g_{\mu\nu}$ в таком виде в уравнения Гильберта — Эйнштейна, мы можем определить значение постньютоновских параметров и опять придем к тому же постньютоновскому приближению. При этом следует отметить, что сами уравнения Гильберта — Эйнштейна не определяют постньютоновское приближение как единственное решение этих уравнений.

Причина неоднозначности решения в ОТО связана с форминвариантностью уравнений Гильберта — Эйнштейна относительно координатных преобразований; это приводит к тому, что в одной и той же координации для метрики риманова пространства $g_{\mu\nu}$ существует неограниченное число решений. Об этом множестве решений А.Эйнштейн в 1914 году писал так: *"Мы рассмотрим некоторую конечную часть Σ пространства, в которой не происходят какие-либо материальные процессы. Тогда физические события в* *области Σ полностью определяются, если по отношению к используемой для описания координатной системе K заданы величины $g_{\mu\nu}$, как функции координат x_ν. Совокупность этих функций будем символически обозначать через $G(x)$.*

Введем новую систему координат K', совпадающую с системой K вне области Σ, но отличную от K внутри Σ, такую, что относительно этой системы K' величины $g'_{\mu\nu}$, как и $g_{\mu\nu}$ (вместе с их производными), всюду непрерывны. Совокупность $g'_{\mu\nu}$ обозначим символически через $G'(x')$. Величины $G'(x')$ и $G(x)$ описывают само гравитационное поле. Выразим входящие в $g'_{\mu\nu}$ координаты x'_ν через координаты x_ν, т.е. образуем $G'(x)$, тогда $G'(x)$ равным образом будет описывать гравитационное поле относительно системы K, которое, однако, не совпадает с имеющимся (или специально заданным) гравитационным полем.

Предположим теперь, что дифференциальные уравнения гравитационного поля общековариантны; тогда их решением будут $G'(x')$ (в системе K'), если в системе K решение суть $G(x)$. Тогда эти уравнения удовлетворяются в системе K также и функциями $G'(x)$. Таким образом, относительно системы K существуют отличные друг от друга решения $G(x)$ и $G'(x)$, несмотря на то, что на границе области оба решения совпадают, т.е. для общековариантных дифференциальных уравнений гравитационного поля последовательность событий может быть неоднозначной. Если мы потребуем, чтобы развитие событий в гравитационном поле полностью определялось устанавливаемыми законами, то необходимо ограничить выбор координатных систем таким образом, чтобы было невозможно ввести новую систему координат K' описанного выше вида без того, чтобы не нарушить введенного ограничения. Продолжение координатной системы внутрь некоторой области Σ не может быть произвольным".

Для того чтобы понять вывод, который А.Эйнштейн сделал в конце приведенного выше текста, мы обратимся к электродинамике. Пусть в некоторой инерциальной системе (галилеевы координаты) решение уравнений имеет вид $F_{\mu\nu}(x)$ при токе $j^\mu(x)$. Если мы перейдем к произвольной системе координат, то в силу общей ковариантности решение $F'_{\mu\nu}(x')$ уравнений Максвелла в новых координатах будет соответствовать току $j'^\mu(x')$. Заметим, что $F'_{\mu\nu}(x)$ не будет удовлетворять уравнению Максвелла в старых координатах при токе $j'^\mu(x)$, поскольку уравнения Максвелла неформинвариантны при произвольных координатных преобразованиях. Уравнения Максвелла форминвариантны относительно лоренцевых преобразований, а поэтому в новых лоренцевых координатах x' решение $F'_{\mu\nu}(x')$ соответствует току $j'^\mu(x')$, а следовательно, в старых координатах решение $F'_{\mu\nu}(x)$ соответствует току $j'^\mu(x)$. Мы видим, что в электродинамике поле $F'_{\mu\nu}(x)$ является решением уравнения Максвелла в старых координатах x, но не при токе $j^\mu(x)$, а при токе $j'^{\mu}(x)$. В ОТО в силу форминвариантности уравнений Гильберта — Эйнштейна относительно произвольных координатных преобразований $G(x)$ и $G'(x)$ являются решениями при одном и том же тензоре вещества $T_{\mu\nu}(x)$. Делая свой вывод, А.Эйнштейн, по-видимому, интуитивно представлял гравитацию как поле в пространстве Минковского. Однако, поскольку он сохранил только риманово пространство, эта мысль не получила развития в его работах.

В ОТО гравитационное поле есть тензор Римана. Геометрия риманова пространства описывается решением уравнений Гильберта — Эйнштейна в произвольных координатах. При выключении гравитационного поля тензор Римана обращается в нуль, а геометрия пространства-времени становится псевдоевклидовой, однако в какой системе координат (инерциальной или ускоренной) мы при этом оказались, сказать нельзя. Но как же тогда выполнить принцип соответствия? В РТГ гравитационные уравнения (76) и (77) общековариантны, но неформинвариантны относительно произвольных преобразований. Они форминвариантны относительно лоренцевых преобразований. Но это означает, что если в лоренцевых координатах имеет место решение $G(x)$ при тензоре вещества $T_{\mu\nu}(x)$, то в новых лоренцевых координатах x' имеет место решение $G'(x')$ при тензоре вещества $T'_{\mu\nu}(x')$, а следовательно, в координатах x решение $G'(x)$ возможно только при тензоре вещества $T'_{\mu\nu}(x)$.

Таким образом, в РТГ реализуется все то, о чем писал А.Эйнштейн, но при этом не требуется отказываться от общей ковариантности теории. Но получено все это, исходя из представления гравитационного поля как физического поля со спинами 2 и 0 в пространстве Минковского. Риманово пространство возникает как эффективное пространство, обязанное наличию гравитационного поля. В РТГ устанавливается взаимно однозначное соответствие между римановой метрикой и метрикой Минковского, что и позволяет при вычислении гравитационного эффекта сравнить движение под действием гравитационного поля с движением при его отсутствии. При выключении гравитационного поля в РТГ обращается в нуль тензор Римана и одновременно совершается переход от римановой метрики к метрике Минковского, ранее выбранной при постановке физической задачи. Это и обеспечивает в РТГ выполнимость принципа соответствия.

Для вычисления гравитационного эффекта необходимо сравнить движение в римановом пространстве с движением при отсутствии гравитационного поля. Именно так определяется гравитационный эффект. Если соотносить совокупность решений для $g_{\mu\nu}$ к какой-то одной инерциальной системе координат, то совершенно очевидно, что мы получим множество различных значений для гравитационного эффекта. Какое из них выбрать? Поскольку в уравнениях Гильберта — Эйнштейна отсутствует метрика пространства Минковского, то невозможно соблюсти принцип соответствия, поскольку нельзя определить, в какой системе координат мы находимся (инерциальной или неинерциальной) при выключении гравитационного поля. Таким образом, в ОТО нельзя однозначно найти постньютоновское приближение, а следовательно, нельзя и описать известные гравитационные эффекты в Солнечной системе. В ОТО это достигается только путем дополнительных предположений, выходящих за пределы этой теории.

В качестве иллюстрации неоднозначности предсказаний ОТО рассмотрим задачу об определении времени запаздывания радиосигнала из-за действия Солнца, при распространении его от Земли до Меркурия и обратно. Для сферически-симметричного статического тела в одной и той же координации уравнения Гильберта — Эйнштейна имеют множество решений, и среди них шварцшильдовское

$$ds_1^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{161}$$

и гармоническое

$$ds_2^2 = \frac{r-M}{r+M} dt^2 - \frac{r+M}{r-M} dr^2 - (r+M)^2 d\Omega^2 \ . \tag{162}$$

Пусть r_e и r_p — расстояния от точек испускания и отражения радиосигнала до центра источника гравитационного поля (Солнце); R — расстояние между точками e и p. Для определения гравитационного эффекта необходимо сравнить движение в римановом пространстве с движением по прямой линии в инерциальной системе. Таким путем мы получим время запаздывания радиосигнала для решения Шварцшильда

$$\Delta t_1 = 2GM \ln \frac{r_e + r_p + R}{r_e + r_p - R} - 2GM \tag{163}$$

и для гармонического решения

$$\Delta t_2 = 2GM \ln \frac{r_e + r_p + R}{r_e + r_p - R} \ . \tag{164}$$

Они отличаются на величину $2GM$, равную для Солнца десяти микросекундам. Какое из выражений (163) и (164) необходимо взять, чтобы найти время запаздывания радиосигнала, идущего от Земли до Меркурия и обратно? На этот вопрос ОТО в принципе не дает ответа, поскольку в уравнения Гильберта — Эйнштейна не входит метрика пространства Минковского. В ОТО гравитационное поле характеризуется не одним метрическим тензором, а классом эквивалентных диффеоморфных метрик $G(x), G'(x)...$, получаемых с помощью преобразования координат. С этой точки зрения в пространстве Минковского метрики, получаемые путем преобразования координат из выражения (α) (см. введение) также образуют класс эквивалентности, однако физически они различны, поскольку одни соответствуют инерциальным системам координат, другие — ускоренным. В ОТО нельзя определить, к какой метрике пространства Минковского необходимо отнести риманову метрику из класса эквивалентности, чтобы определить гравитационный эффект. Таким образом, не удается соблюсти очевидный принцип — принцип соответствия.

Согласно РТГ, время запаздывания радиосигнала определяется однозначно и приводит к выражению (164), если в инерциальной системе используются галилеевы координаты. В РТГ можно было бы взять и решение Шварцшильда, однако в этом случае, согласно уравнениям (76) и (77) РТГ, метрика пространства Минковского была бы другой, она несколько изменится. Благодаря такому изменению метрики пространства Минковского и решение Шварцшильда (161) приведет к тому, что эффект запаздывания радиосигнала из-за действия Солнца будет определяться выражением (164), т.е. останется прежним.

В заключение данного раздела отметим, что постньютоновское приближение (151) удовлетворяет принципу причинности (90).

9. НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ РТГ

Из результатов, полученных в предыдущем разделе, следует, что РТГ объясняет все известные гравитационные эксперименты в Солнечной системе. Заметим, что все эффекты в Солнечной системе вычисляются в инерциальной системе координат, к которой и отнесены все наблюдательные данные. В силу того, что источником гравитационного поля является сохраняющаяся суммарная плотность тензора вещества и гравитационного поля, инертная масса статического тела точно равна его активной гравитационной массе. Это равенство не предполагает даже локальной тождественности сил инерции и гравитации.

Важный физический вывод можно сделать и относительно развития однородной и изотропной Вселенной. На основании уравнений (76) и (77) для однородной и изотропной Вселенной можно получить следующие уравнения:

$$\left(\frac{1}{R}\cdot\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho(\tau) - \frac{1}{6}m^2\left(1 - \frac{3}{2a^4R^2} + \frac{1}{2R^6}\right)\,, \tag{165}$$

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{d^2R}{d\tau^2} = -\frac{4\pi}{3}\rho(\tau) - 4\pi p(\tau) - \frac{1}{6}m^2\left(1 - \frac{1}{R^6}\right)\,. \tag{166}$$

Интервал эффективного риманова пространства имеет вид

$$ds^2 = d\tau^2 - a^4R^2(\tau)(dr^2 + r^2 d\Omega^2)\,, \tag{167}$$

здесь a — постоянная интегрирования уравнений (77). В силу условия причинности (90) имеем

$$R(\tau) \leq a \; . \tag{168}$$

Постоянная $a > 1$. Легко установить следующее неравенство:

$$\left(1 - \frac{3}{2a^4R^2} + \frac{1}{2R^6}\right) > \frac{1}{R^6}(R^2-1)^2\left(R^2+\frac{1}{2}\right) \; . \tag{169}$$

Учитывая (169), на основании уравнения (165) можно установить, что развитие однородной и изотропной Вселенной идет циклически от некоторого минимального значения $R_{\min}$, отличного от нуля, до некоторого максимального значения $R_{\max}$ и т.д. Для выполнения условия причинности (168) естественно выбрать

$$a = R_{\max} \; . \tag{170}$$

Введем функцию, равную

$$H(\tau) = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{d\tau} \; . \tag{171}$$

Тогда для современного момента времени τ_p, восстанавливая явно зависимость от постоянной тяготения Ньютона G и скорости света c, на основании уравнений (165) получим

$$\rho(\tau_p) = \rho_c + \rho_g \; , \tag{172}$$

где критическая плотность ρ_c определяется постоянной Хаббла $H(\tau_p)$ и равна

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \; , \tag{173}$$

а плотность ρ_g, определяемая массой гравитона, равна

$$\rho_g = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \; . \tag{174}$$

Однородная и изотропная Вселенная бесконечна, её трехмерная геометрия евклидова, и она развивается циклически от некоторой максимальной плотности ρ_{max} до минимальной ρ_{min}, равной

$$\rho_{\min} = \rho_g , \tag{175}$$

и так далее.

Космологическая постоянная Λ выражается через массу гравитона:

$$\Lambda = \frac{m^2}{2} \; . \tag{176}$$

Из формул (172) и (174) очевидно, что, если, например, масса гравитона меньше или равна 10^{-66}г, что соответствует космологической постоянной $\Lambda \leq 4,5 \cdot 10^{-58}$см$^{-2}$, то плотность вещества во Вселенной в настоящее время должна быть близка в критической плотности ρ_c. В том случае, если масса гравитона равна 10^{-65}г, что соответствует космологической постоянной $\Lambda = 4,5 \cdot 10^{-56}$см$^{-2}$, то плотность ρ_g дает значительный вклад в плотность вещества во Вселенной ρ, равный

$$\rho_g \simeq 2,8 \cdot 10^{-29}\text{г/см}^3 \ . \tag{177}$$

В любом случае имеет место неравенство

$$\rho \geq \rho_c \ . \tag{178}$$

Так как наблюдаемая плотность вещества во Вселенной значительно меньше критической плотности ρ_c, то РТГ предсказывает существование во Вселенной большой “скрытой” массы вещества. Согласно РТГ, параметр замедления равен

$$q(\tau_p) = \frac{1}{2}\left[1 + 3\frac{\rho_g}{\rho}\right] \ .$$

Отсюда видно, что ρ_g, а следовательно, и массу гравитона m можно выразить через измеряемые величины — параметр замедления q и постоянную Хаббла H. Следует заметить, что если параметр замедления окажется больше, чем $1/2$, то масса гравитона, согласно теории, будет отлична от нуля. При этом Вселенная не будет замкнутой, как это имело бы место в ОТО, а будет ”плоской”.

Следует особо отметить, что, в отличие от ОТО в рассмотренной выше модели Вселенной Фридмана отсутствуют известные проблемы: сингулярности, причинности, евклидовости, плоскостности и энтропии. Вид Вселенной Фридмана не зависит от отношения современной плотности вещества к критической плотности, определяемой постоянной Хаббла.

Для изотропных или времениподобных векторов U^ν

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq 0,$$

и для метрики однородной и изотропной Вселенной из уравнений (92) найдем

$$R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu < 0, \text{ при } R = R_{\min}$$

и

$$R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu > 0, \text{ при } R = R_{\max}.$$

Отсюда видно, что условия теорем Пенроуза и Хокинга, относящихся к проблеме сингулярности, в нашей теории не выполняются.

Таким образом, в отличие от ОТО, однородная и изотропная Вселенная в РТГ может быть только "плоской", и она не имеет сингулярности. Другим важным следствием РТГ является существенное изменение характера коллапса. Оказывается, что при коллапсе сферически-симметричного тела произвольной большой массы процесс сжатия в области, близкой к сфере Шварцшильда, останавливается и сменяется последующим расширением. Такой процесс остановки сжатия происходит из-за наличия в уравнениях (76) массового члена с метрическим тензором пространства Минковского. Именно этот член останавливает также процесс сжатия и в однородной изотропной Вселенной. Таким образом, согласно РТГ существование в природе "черных дыр" (объектов, не имеющих материальных границ и "отрезанных" от внешнего мира) полностью исключается. В работе [16] показано, что для сферически-симметричного статического тела метрические коэффициенты риманова пространства имеют в области, близкой к сфере Шварцшильда, следующий вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= U(Z)dt^2 - V(Z)dZ^2 - Z^2 d\Omega^2 \ , \\ V(Z) &= \frac{Z}{Z - Z_g}, \ U(Z) = (1 + 2mM)\frac{Z - Z_g}{Z} + qm^2M^2, \ q > 0 \ . \end{aligned} \tag{179}$$

Особенность в функции V возникла в точке Z_g, равной

$$Z_g = 2M + \nu m^2 M^3 \ln \frac{1}{mM}, \ \nu > 0 \ . \tag{180}$$

Сфера радиуса Z_g является сингулярной, причем эту особенность нельзя устранить выбором системы координат. Из выражений (179) и (180) видно, что в области, близкой к сфере Шварцшильда, влияние массы гравитона m велико, она принципиально изменяет характер решения в этой области, а поэтому пренебрегать ею уже нельзя. Если перейдем в синхронную систему свободно падающих пробных частиц, имеющих на бесконечности нулевую скорость, с помощью преобразований

$$\tau = t + \int dZ \left[\frac{V(1-U)}{U}\right]^{1/2} ,$$

$$R = t + \int dZ \left[\frac{V}{U(1-U)}\right]^{1/2} ,$$

то получим следующее выражение для интервала:

$$ds^2 = d\tau^2 - (1-U)dR^2 - Z^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2) \ .$$

Радиальная скорость частицы, падающей вдоль радиуса, равна

$$\frac{dZ}{d\tau} = -\sqrt{\frac{1-U}{UV}} \ .$$

На основании (179) в области, близкой к сфере Шварцшильда, имеем

$$\frac{dZ}{d\tau} = -\frac{1}{\sqrt{q}mM}\sqrt{\frac{Z - Z_g}{Z}} .$$

Отсюда очевидно, что точка $Z = Z_g$ является точкой поворота для радиального движения частиц. Таким образом, наличие массы гравитона m, независимо от ее значения, приводит к явлению отталкивания частиц вещества [17] от сферы, близкой к сфере Шварцшильда. Поскольку решение внутри тела необходимо сшить с внешним решением, то сфера с радиусом $Z = Z_g$ не может находиться вне вещества.

На больших расстояниях r от тела метрические коэффициенты имеют вид

$$U(r) = 1 - \frac{2M}{r}e^{-mr}, \quad V(r) = 1 + \frac{2M}{r}e^{-mr}, \quad Z(r) = r\left(1 + \frac{M}{r}e^{-mr}\right).$$

Остановимся на проблеме излучения слабых гравитационных волн при наличии массы гравитона. Давно хорошо известно, что в линейной тензорной теории введение массы гравитона всегда сопровождается “духами”. Однако в работе [18] показано, что интенсивность гравитационного излучения массивных гравитонов в нелинейной теории является положительно определенной величиной, равной

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\omega_{\min}}^{\infty} d\omega\omega^2 q\{|T_2^1|^2 + \frac{1}{4}|T_1^1 - T_2^2|^2 + \frac{m^2}{\omega^2}(|T_3^1|^2 + |T_3^2|^2) + \frac{3m^4}{4\omega^4}|T_3^3|^2\} , \tag{181}$$

здесь $q = \left(1 - \frac{m^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$.

В РТГ, так же, как и в ОТО, вне вещества плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля в римановом пространстве равна нулю:

$$T_g^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_g}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 . \tag{182}$$

Но это означает, что поток энергии гравитационного поля в теории гравитации не определяется компонентами плотности тензора T_g^{0i}, вычисленными на решениях уравнений (182), поскольку они равны нулю. Задача определения потока энергии в теории гравитации, в отличие от других теорий, требует иного подхода. Автор работы [18] ищет решение в форме

$$\tilde{\Phi}^{\mu\nu} = \chi^{\mu\nu} + \psi^{\mu\nu} , \tag{183}$$

где величины $\chi^{\mu\nu}$ и $\psi^{\mu\nu}$ одного порядка малости, причем $\psi^{\mu\nu}$ описывает расходящиеся волны, а $\chi^{\mu\nu}$ характеризует фон. Перенос энергии осуществляется только расходящимися волнами. Автор работы [18] показывает, что фактически поток гравитационной энергии определяется величиной $T_g^{0i}(\psi)$, вычисленной не на самих решениях уравнений (182), а только на той части решений, которая описывает расходящиеся волны $\psi^{\mu\nu}$. При этом он учитывает, что гравитоны распространяются не в пространстве Минковского, как это всегда имеет место в линейной теории, а в эффективном римановом пространстве. Поэтому в линейном приближении выполняется равенство

$$\gamma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\cdot\frac{dx^\nu}{ds}-1=\frac{d\sigma^2-ds^2}{ds^2}\simeq-\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\Phi^{\mu\nu}+\Phi^{\mu\nu}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\cdot\frac{dx^\beta}{d\sigma}\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{\nu\beta}\ .$$

Именно последовательный учет этого обстоятельства в процессе нахождения интенсивности и приводит автора [18] к положительно определенному потоку энергии, определяемому формулой (181). Результат работы [18] имеет принципиальное значение, поскольку он изменяет сложившиеся представления, а поэтому с необходимостью требует дальнейшего анализа.

Следует отметить, что система гравитационных уравнений (76) и (77) является гиперболической, причем принцип причинности и обеспечивает существование во всем пространстве пространственноподобной поверхности, которую каждая непространственноподобная кривая в римановом пространстве пересекает только один раз, т.е., иначе говоря, существует глобальная поверхность Коши, на которой и задаются для той или иной задачи начальные физические условия. Пенроузом и Хокингом [12] при определенных общих условиях доказаны теоремы о существовании сингулярности в ОТО. На основании уравнений (78*a*) вне вещества для изотропных векторов риманова пространства, в силу условий причинности (91*a*), имеет место неравенство

$$R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu\le 0\ . \tag{184}$$

В силу неравенства (184) условия вышеупомянутых теорем в РТГ не выполняются, а следовательно, и применять их нельзя.

В РТГ пространственноподобные события в отсутствие гравитационного поля никогда не могут стать под действием гравитационного поля времениподобными. На основании принципа причинности эффективное риманово пространство в РТГ будет обладать изотропной и времениподобной геодезической полнотой. Согласно РТГ, инерциальная система координат определяется по распределению вещества и гравитационного поля во Вселенной (принцип Маха).

В ОТО поля инерции и гравитации неразделимы. А.Эйнштейн об этом писал: "*...не существует никакого реального разделения на инерцию и гравитацию, поскольку ответ на вопрос о том, находится ли тело в определен-*

ный момент исключительно под действием инерции или под комбинированным воздействием инерции и гравитации, зависит от системы координат, т.е. от способа рассмотрения". Поля инерции удовлетворяют уравнениям Гильберта — Эйнштейна. В РТГ гравитационное поле и поля инерции, определяемые метрическим тензором пространства Минковского, разделены, они не имеют ничего общего. Они разной природы. Поля инерции не являются решениями уравнений (76) и (77) РТГ. В РТГ поля инерции задаются метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$, а гравитационное поле $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$ определяется из уравнений гравитации (76) и (77).

На основании РТГ можно сделать следующий общий вывод.

Универсальные интегральные законы сохранения энергии-импульса и универсальные свойства материи, такие (например) как гравитационные взаимодействия, находят отражение в метрических свойствах пространства-времени. Если первые находят воплощение в псевдоевклидовой геометрии пространства-времени, то вторые находят отражение в эффективной римановой геометрии пространства-времени, возникшей из-за присутствия гравитационного поля в пространстве Минковского. В структуру эффективной геометрии можно отнести все, что имеет общий характер для всей материи. Но при этом пространство Минковского обязательно присутствует, что и приводит к интегральным законам сохранения энергии-импульса и момента количества движения, а также обеспечивает соблюдение принципа соответствия при выключении гравитационного поля.

Автор выражает благодарность А.М.Балдину, А.А.Власову, С.С.Герштейну, В.И.Денисову, Ю.М.Лоскутову, М.А.Мествиришвили, В.А.Петрову, Н.Е.Тюрину, А.А.Тяпкину, О.А.Хрусталеву за ценные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Установим соотношение

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta^{\star} L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} \,, \qquad (A.1)$$

здесь

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} \right) \,, \qquad (A.2)$$

$$\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \right) , \qquad (A.3)$$

звездочкой в верхней формуле обозначена вариационная производная от плотности лагранжиана по явно входящей в L метрике $\gamma_{\mu\nu}$. После дифференцирования получим

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial^\star L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \,, \tag{A.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{\partial^\star L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \,. \tag{A.5}$$

Подставим эти выражения в формулу (A.2):

$$\begin{gathered}\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}}\right) = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \\ -\partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}}\right) = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \\ -\partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}\right) \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}}\right)\right].\end{gathered} \tag{A.6}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}}\right). \tag{A.7}$$

Для этой цели запишем производную $g_{\alpha\beta,\sigma}$ в форме

$$g_{\alpha\beta,\sigma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \Phi_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \Phi_{\lambda\omega} \,, \tag{A.8}$$

отсюда легко найти

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \cdot \delta^\rho_\sigma \,. \tag{A.9}$$

Дифференцируя это выражение, получаем

$$\partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}}\right) = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \gamma_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \Phi_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \Phi_{\lambda\omega} \,. \tag{A.10}$$

С другой стороны, дифференцируя (A.8) по $\gamma_{\mu\nu}$, имеем

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \gamma_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \Phi_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \Phi_{\lambda\omega} \,. \tag{A.11}$$

Сравнивая (A.10) и (A.11), найдем

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}}\right) = 0 \,. \tag{A.12}$$

Учитывая это соотношение, в (А.6) получим

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}\right) \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} \, . \qquad (A.13)$$

Подставляя (А.9) в (А.13), найдем

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} + \left[\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}\right)\right] \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} \, , \qquad (A.14)$$

то есть

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} \, . \qquad (A.15)$$

Аналогично вычисляется

$$\frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}} = \frac{\delta L}{\delta\tilde{g}^{\lambda\rho}} \cdot \frac{\partial\tilde{g}^{\lambda\rho}}{\partial g_{\alpha\beta}} \, . \qquad (A.16)$$

Используя (А.16), выражение (А.15) можно записать в виде

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta L}{\delta\tilde{g}^{\lambda\rho}} \cdot \frac{\partial\tilde{g}^{\lambda\rho}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} \, . \qquad (A.17)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Плотность лагранжиана собственно гравитационного поля имеет вид

$$L_g = L_{g0} + L_{gm} \, , \qquad (Б.1)$$

$$L_{g0} = -\frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\alpha\beta}\left(G^\tau_{\lambda\alpha}G^\lambda_{\tau\beta} - G^\tau_{\alpha\beta}G^\lambda_{\tau\lambda}\right) , \qquad (Б.2)$$

$$L_{gm} = -\frac{m^2}{16\pi}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \sqrt{-g} - \sqrt{-\gamma}\right) . \qquad (Б.3)$$

Тензор третьего ранга $G^\tau_{\alpha\beta}$ равен

$$G^\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\tau\lambda}(D_\alpha g_{\beta\lambda} + D_\beta g_{\alpha\lambda} - D_\lambda g_{\alpha\beta}) \, , \qquad (Б.4)$$

он выражается через символы Кристоффеля риманова пространства и пространства Минковского:

$$G^\tau_{\alpha\beta} = \Gamma^\tau_{\alpha\beta} - \gamma^\tau_{\alpha\beta} \, . \qquad (Б.5)$$

Вычислим вариационную производную от L_g по явно входящей метрике пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\frac{\delta^\star L_{g0}}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L_{g0}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma\left(\frac{\partial L_{g0}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}}\right). \tag{Б.6}$$

Для этой цели проведем некоторые подготовительные вычисления:

$$\frac{\partial G^\lambda_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = -\frac{\partial\gamma^\lambda_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}(\gamma^{\lambda\mu}\gamma^\nu_{\alpha\beta} + \gamma^{\lambda\nu}\gamma^\mu_{\alpha\beta})\ ,$$

$$\frac{\partial G^\lambda_{\alpha\lambda}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = -\frac{\partial\gamma^\lambda_{\alpha\lambda}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}(\gamma^{\lambda\mu}\gamma^\nu_{\lambda\alpha} + \gamma^{\lambda\nu}\gamma^\mu_{\alpha\lambda})\ , \tag{Б.7}$$

$$\frac{\partial G^\lambda_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} = -\frac{\partial\gamma^\lambda_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} =$$

$$= -\frac{1}{4}[\gamma^{\lambda\mu}(\delta^\nu_\alpha\delta^\sigma_\beta + \delta^\sigma_\alpha\delta^\nu_\beta) + \gamma^{\lambda\nu}(\delta^\mu_\alpha\delta^\sigma_\beta + \delta^\sigma_\alpha\delta^\mu_\beta) - \gamma^{\lambda\sigma}(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta + \delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta)]\ ,$$

$$\frac{\partial G^\lambda_{\alpha\lambda}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} = -\frac{\partial\gamma^\lambda_{\alpha\lambda}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} = -\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\delta^\sigma_\alpha\ . \tag{Б.8}$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial L_{g0}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\alpha\beta}\left[\frac{\partial G^\tau_{\alpha\lambda}}{\partial\gamma_{\mu\nu}}G^\lambda_{\tau\beta} + G^\tau_{\lambda\alpha}\frac{\partial G^\lambda_{\tau\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - \frac{\partial G^\tau_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}}G^\lambda_{\tau\lambda} - G^\tau_{\alpha\beta}\frac{\partial G^\lambda_{\tau\lambda}}{\partial\gamma_{\mu\nu}}\right].$$

Используя в этом выражении формулы (Б.7), находим

$$\frac{\partial L_{g0}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\alpha\beta}\Big\{G^\tau_{\lambda\alpha}\gamma^{\lambda\mu}\gamma^\nu_{\tau\beta} + G^\tau_{\lambda\alpha}\gamma^{\lambda\nu}\gamma^\mu_{\tau\beta} - \frac{1}{2}G^\lambda_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\mu}\gamma^\nu_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}G^\lambda_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\nu}\gamma^\mu_{\alpha\beta} -$$

$$-\frac{1}{2}G^\tau_{\alpha\beta}\gamma^{\lambda\mu}\gamma^\nu_{\tau\lambda} - \frac{1}{2}G^\tau_{\alpha\beta}\gamma^{\lambda\nu}\gamma^\mu_{\tau\lambda}\Big\} = \frac{1}{32\pi}B^{\mu\nu}. \tag{Б.9}$$

С помощью производных (Б.8) получим

$$\frac{\partial L_{g0}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{1}{32\pi}A^{\sigma\mu\nu},\ A^{\sigma\mu\nu} = \gamma^{\tau\mu}(G^\sigma_{\tau\beta}\tilde{g}^{\nu\beta} + G^\nu_{\tau\beta}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^\lambda_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\sigma\nu}) +$$

$$+\gamma^{\tau\nu}(G^\sigma_{\tau\beta}\tilde{g}^{\mu\beta} + G^\mu_{\tau\beta}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^\lambda_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\sigma\mu}) + \gamma^{\tau\sigma}(G^\lambda_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\mu\nu} - G^\mu_{\tau\beta}\tilde{g}^{\nu\beta} - G^\nu_{\tau\beta}\tilde{g}^{\mu\beta}) -$$

$$-\gamma^{\mu\nu}G^\sigma_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta}\ , \tag{Б.10}$$

плотность тензора $A^{\sigma\mu\nu}$ симметрична по индексам μ и ν. Обычная производная от плотности тензора может быть представлена в форме

$$\partial_\sigma A^{\sigma\mu\nu} = D_\sigma A^{\sigma\mu\nu} - \gamma^\mu_{\sigma\rho} A^{\sigma\rho\nu} - \gamma^\nu_{\sigma\rho} A^{\sigma\mu\rho}.$$

Подставляя в (Б.6) выражения (Б.9) и (Б.10), найдем

$$\frac{\delta^\star L_{g0}}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{32\pi} B^{\mu\nu} - \frac{1}{32\pi} D_\sigma A^{\sigma\mu\nu} + \frac{1}{32\pi}\gamma^\mu_{\sigma\rho} A^{\sigma\rho\nu} + \frac{1}{32\pi}\gamma^\nu_{\sigma\rho} A^{\sigma\mu\rho}. \qquad (Б.11)$$

Запишем плотность тензора $A^{\sigma\rho\nu}$ в форме

$$A^{\sigma\rho\nu} = (G^\sigma_{\tau\beta}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\nu\beta} - G^\rho_{\tau\beta}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\nu\beta}) + (G^\nu_{\tau\beta}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^\nu_{\tau\beta}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\rho\beta}) -$$
$$-(G^\lambda_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\sigma\nu} - G^\lambda_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\rho\nu}) + G^\sigma_{\tau\beta}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\rho\beta} + G^\rho_{\tau\beta}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\sigma\beta} -$$
$$-G^\lambda_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\sigma\rho} - G^\sigma_{\alpha\beta}\gamma^{\rho\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta},$$

в скобках образованы антисимметричные члены по индексам σ и ρ. Такая запись облегчает нахождение выражения для величины $\gamma^\mu_{\sigma\rho} A^{\sigma\rho\nu}$, поскольку при этом автоматически исчезают члены, антисимметричные по индексам σ и ρ:

$$\gamma^\mu_{\sigma\rho} A^{\sigma\rho\nu} = 2G^\sigma_{\tau\beta}\gamma^\mu_{\sigma\rho}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\rho\beta} - G^\lambda_{\tau\lambda}\gamma^\mu_{\sigma\rho}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\sigma\rho} - G^\sigma_{\alpha\beta}\gamma^\mu_{\sigma\rho}\gamma^{\nu\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta}, \qquad (Б.12)$$

аналогично представляем $A^{\sigma\mu\rho}$ в виде

$$A^{\sigma\mu\rho} = (G^\sigma_{\tau\beta}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\mu\beta} - G^\rho_{\tau\beta}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\mu\beta}) + (G^\mu_{\tau\beta}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^\mu_{\tau\beta}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\rho\beta}) +$$
$$+(G^\lambda_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\mu\rho} - G^\lambda_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\sigma\mu}) + G^\sigma_{\tau\beta}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\rho\beta} + G^\rho_{\tau\beta}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\sigma\beta} -$$
$$-G^\lambda_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\sigma\rho} - G^\sigma_{\alpha\beta}\gamma^{\mu\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta},$$

где в скобках опять образованы антисимметричные члены по индексам σ и ρ. Отсюда получаем

$$\gamma^\nu_{\sigma\rho} A^{\sigma\mu\rho} = 2G^\sigma_{\tau\beta}\gamma^\nu_{\sigma\rho}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\rho\beta} - G^\lambda_{\tau\lambda}\gamma^\nu_{\sigma\rho}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\sigma\rho} - G^\sigma_{\alpha\beta}\gamma^\nu_{\sigma\rho}\gamma^{\mu\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta}. \qquad (Б.13)$$

Суммируя (Б.12) и (Б.13), легко убедиться в следующем равенстве:

$$\gamma^\mu_{\sigma\rho} A^{\sigma\rho\nu} + \gamma^\nu_{\sigma\rho} A^{\sigma\mu\rho} = -B^{\mu\nu}. \qquad (Б.14)$$

С учетом этого равенства выражение (Б.11) запишется в форме

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{32\pi} D_\sigma A^{\sigma\mu\nu}. \qquad (Б.15)$$

Учитывая равенства

$$G^{\lambda}_{\tau\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} D_\tau g_{\lambda\rho},\ D_\tau \sqrt{-g} = \sqrt{-g} G^{\lambda}_{\tau\lambda}\ ,$$

найдем

$$\begin{aligned} G^{\sigma}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\nu\beta} + G^{\nu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\sigma\nu} &= -D_\tau \tilde{g}^{\nu\sigma}\ , \\ G^{\sigma}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\mu\beta} + G^{\mu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\sigma\mu} &= -D_\tau \tilde{g}^{\mu\sigma}\ , \\ G^{\nu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\mu\beta} + G^{\mu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\nu\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\mu\nu} &= -D_\tau \tilde{g}^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{Б.16}$$

Подставляя эти выражения в (Б.10), получаем

$$A^{\sigma\mu\nu} = \gamma^{\tau\sigma} D_\tau \tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu} D_\tau \tilde{g}^{\tau\sigma} - \gamma^{\tau\mu} D_\tau \tilde{g}^{\nu\sigma} - \gamma^{\tau\nu} D_\tau \tilde{g}^{\mu\sigma}.$$

Используя это выражение в (Б.15), найдем

$$\frac{\delta^\star L_{g0}}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{32\pi} J^{\mu\nu}, \tag{Б.17}$$

где $J^{\mu\nu} = -D_\sigma D_\tau(\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\tau\sigma} - \gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\nu\sigma} - \gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\mu\sigma})$.

На основании (Б.3) имеем

$$\frac{\delta^\star L_{gm}}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = -\frac{m^2}{32\pi}(\tilde{g}^{\mu\nu} - \tilde{\gamma}^{\mu\nu}) = -\frac{m^2}{32\pi}\tilde{\Phi}^{\mu\nu}. \tag{Б.18}$$

Таким образом, учитывая (Б.1) и используя (Б.17) и (Б.18), находим

$$\frac{\delta^\star L_g}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{32\pi}(J^{\mu\nu} - m^2\tilde{\Phi}^{\mu\nu})\ , \tag{Б.19}$$

а следовательно,

$$-2\frac{\delta^\star L_g}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi}(-J^{\mu\nu} + m^2\tilde{\Phi}^{\mu\nu})\ . \tag{Б.20}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Для любой заданной плотности лагранжиана L, при бесконечно малом изменении координат, вариация действия

$$S = \int L d^4x$$

будет равна нулю. Вычислим вариацию действия от плотности лагранжиана L_M:

$$S_M = \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A) d^4x$$

вещества и установим сильное тождество. При преобразовании координат

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x), \tag{B.1}$$

где $\xi^{\mu}(x)$ — бесконечно малый четырехвектор смещения, вариация действия равна

$$\delta_c S_M = \int d^4x \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta_L \tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} \delta_L \Phi_A + \mathrm{div} \right) = 0, \tag{B.2}$$

в этом выражении div обозначает дивергенциальные члены, которые несущественны для наших целей.

Эйлерова вариация определена как обычно:

$$\frac{\delta L}{\delta \Phi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Phi)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \Phi)}.$$

Вариации Ли $\delta_L \tilde{g}^{\mu\nu}$, $\delta_L \Phi_A$ при изменении координат легко вычисляются, если использовать закон преобразования величин $g^{\mu\nu}$, Φ_A:

$$\begin{gathered} \delta_L \tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\lambda\mu} D_\lambda \xi^\nu + \tilde{g}^{\lambda\nu} D_\lambda \xi^\mu - D_\lambda(\xi^\lambda \tilde{g}^{\mu\nu}), \\ \delta_L \Phi_A = -\xi^\lambda D_\lambda \Phi_A + F^{B;\lambda}_{A;\sigma} \Phi_B D_\lambda \xi^\sigma, \end{gathered} \tag{B.3}$$

D_λ — ковариантные производные в пространстве Минковского. Подставляя эти выражения в (B.2) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{gathered} \delta S_M = \int d^4x \Bigg\{ -\xi^\lambda \Bigg[D_\alpha \left(2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\lambda\nu}} \tilde{g}^{\alpha\nu} \right) - D_\lambda \left(\frac{\delta L_M)}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \right) \tilde{g}^{\alpha\beta} + \\ + D_\sigma \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F^{B;\sigma}_{A;\lambda} \Phi_B \right) + \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_\lambda \Phi_A \Bigg] + \mathrm{div} \Bigg\} = 0. \end{gathered} \tag{B.4}$$

В силу произвольности вектора ξ^λ из этого равенства находим сильное тождество, справедливое независимо от выполнения уравнений движения для полей. Оно имеет вид

$$\begin{gathered} D_\alpha \left(2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\lambda\nu}} \tilde{g}^{\alpha\nu} \right) - D_\lambda \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \right) \tilde{g}^{\alpha\beta} = \\ = -D_\sigma \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F^{B;\sigma}_{A;\lambda} \Phi_B \right) - \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_\lambda \Phi_A. \end{gathered} \tag{B.5}$$

Введем обозначения

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad T^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta}, \quad T = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu},$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = 2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}, \quad \tilde{T}^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}_{\mu\nu}} = \tilde{g}^{\mu\alpha}\tilde{g}^{\nu\beta}\tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad \tilde{T} = \tilde{T}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\alpha\beta}. \qquad (B.6)$$

Учитывая эти обозначения, левую часть тождества (B.5) можно записать в виде

$$D_\alpha(\tilde{T}_{\lambda\nu}\tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\lambda\tilde{T}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha(\tilde{T}_{\lambda\nu}\tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\lambda\tilde{T}_{\alpha\beta}.$$

Правая часть этого равенства легко приводится к форме

$$\partial_\alpha(\tilde{T}_{\lambda\nu}\tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\lambda\tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\lambda\nu}\nabla_\alpha\left(\tilde{T}^{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\nu}\tilde{T}\right). \qquad (B.7)$$

Здесь ∇_α — ковариантная производная в римановом пространстве. Запишем теперь выражение под знаком производной через плотность тензора $T^{\alpha\nu}$. Для этой цели воспользуемся ф-лой (A.16):

$$\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}}, \qquad (B.8)$$

где

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{1}{2\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}g^{\alpha\beta}. \qquad (B.9)$$

Используя соотношения

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\sigma} = \delta^\alpha_\sigma,$$

найдем

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta} + g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}). \qquad (B10)$$

По правилу дифференцирования определителей находим

$$dg = gg^{\mu\nu}dg_{\mu\nu}, \qquad (B.11)$$

откуда имеем

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = gg^{\mu\nu}. \qquad (B12)$$

Подставляя выражения (B.10) и (B.12) в (B.9), получим

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}[g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}]. \qquad (B.13)$$

Используя это соотношение в (B.8), находим

$$\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - \frac{1}{2}\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\right). \qquad (B.14)$$

Учитывая обозначения (В.6), это выражение можно записать в виде

$$\sqrt{-g}T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{T}. \qquad (B.15)$$

На основании этого равенства сильное тождество (В.5) с учетом (В.7) принимает вид

$$g_{\lambda\nu}\nabla_\alpha T^{\alpha\nu} = -D_\sigma\left(\frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A}F^{B;\sigma}_{A;\lambda}\Phi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A}D_\lambda\Phi_A,$$

или

$$\nabla_\alpha T^\alpha_\lambda = -D_\sigma\left(\frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A}F^{B;\sigma}_{A;\lambda}\Phi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A}D_\lambda\Phi_A. \qquad (B.16)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Тензор кривизны второго ранга $R_{\mu\nu}$ можно записать в форме

$$\begin{gathered}
R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\tilde{g}^{\alpha\beta}(\tilde{g}_{\mu\kappa}\tilde{g}_{\nu\rho} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\kappa\rho})D_\alpha D_\beta\tilde{g}^{\kappa\rho} - \\
-\tilde{g}_{\nu\rho}D_\kappa D_\mu\tilde{g}^{\kappa\rho} - \tilde{g}_{\mu\kappa}D_\nu D_\rho\tilde{g}^{\kappa\rho}] + \frac{1}{2}\tilde{g}_{\nu\omega}\tilde{g}_{\rho\tau}D_\mu\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa\tilde{g}^{\omega\tau} + \\
+\frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\omega}\tilde{g}_{\rho\tau}D_\nu\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa\tilde{g}^{\omega\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\omega}\tilde{g}_{\nu\rho}D_\tau\tilde{g}^{\omega\kappa}D_\kappa\tilde{g}^{\rho\tau} - \\
-\frac{1}{4}(\tilde{g}_{\omega\rho}\tilde{g}_{\kappa\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\omega\tau}\tilde{g}_{\kappa\rho})D_\mu\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\nu\tilde{g}^{\omega\tau} - \\
-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\rho\tau}(\tilde{g}_{\mu\kappa}\tilde{g}_{\nu\omega} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\kappa\omega})D_\alpha\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\beta\tilde{g}^{\omega\tau}. \qquad (\text{Г}.1)
\end{gathered}$$

Поднимая индексы путем умножения на $g^{\epsilon\mu}g^{\lambda\nu}$ и учитывая уравнение

$$D_\mu\tilde{g}^{\mu\nu} = 0\ , \qquad (\text{Г}.2)$$

получим

$$\begin{gathered}
-gR^{\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{g}^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{4}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\kappa\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{g}^{\kappa\rho} + \\
+\frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\epsilon\mu}D_\mu\tilde{g}^{\kappa\beta}D_\kappa\tilde{g}^{\lambda\tau} + \\
+\frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\lambda\nu}D_\nu\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa\tilde{g}^{\epsilon\tau} - \frac{1}{2}D_\tau\tilde{g}^{\epsilon\kappa}D_\kappa\tilde{g}^{\lambda\tau} - \\
-\frac{1}{4}(\tilde{g}_{\omega\rho}\tilde{g}_{\kappa\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\omega\tau}\tilde{g}_{\kappa\rho})\tilde{g}^{\epsilon\mu}\tilde{g}^{\lambda\nu}D_\mu\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\nu\tilde{g}^{\omega\tau} -
\end{gathered}$$

$$-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\rho}D_\beta\tilde{g}^{\lambda\tau}+\frac{1}{4}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\kappa\omega}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\beta\tilde{g}^{\omega\tau}. \qquad (\Gamma.3)$$

Отсюда находим

$$-gR=\frac{1}{2}g_{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{g}^{\epsilon\lambda}-g_{\kappa\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{g}^{\kappa\rho}+\frac{1}{2}g_{\rho\tau}D_\mu\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa\tilde{g}^{\mu\tau}+$$

$$+\frac{1}{2}g_{\rho\tau}D_\epsilon\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa\tilde{g}^{\epsilon\tau}-\frac{1}{2}g_{\epsilon\lambda}D_\tau\tilde{g}^{\epsilon\kappa}D_\kappa\tilde{g}^{\lambda\tau}-$$

$$-\frac{1}{4}(\tilde{g}_{\omega\rho}\tilde{g}_{\kappa\tau}-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\omega\tau}\tilde{g}_{\kappa\rho})\sqrt{-g}\tilde{g}^{\mu\nu}D_\mu\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\nu\tilde{g}^{\omega\tau}-$$

$$-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\alpha\beta}g_{\epsilon\lambda}D_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\beta}D_\beta\tilde{g}^{\lambda\tau}+\tilde{g}_{\rho\tau}g_{\kappa\omega}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\beta\tilde{g}^{\omega\tau}. \qquad (\Gamma.4)$$

С помощью выражений (Г.3) и (Г.4) найдем

$$-g(R^{\epsilon\lambda}-\frac{1}{2}g^{\epsilon\lambda}R)=-\frac{1}{2}\{\frac{1}{2}(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\kappa}-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\nu\kappa}\tilde{g}_{\tau\sigma})\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}D_\alpha\tilde{g}^{\sigma\tau}D_\beta\tilde{g}^{\nu\kappa}-$$

$$-\frac{1}{4}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\kappa}-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\nu\kappa}\tilde{g}_{\tau\sigma})D_\alpha\tilde{g}^{\tau\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\nu\kappa}+$$

$$+\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\sigma\tau}D_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\tau}D_\beta\tilde{g}^{\lambda\sigma}-\tilde{g}^{\epsilon\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{g}^{\lambda\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\alpha\tau}-$$

$$-\tilde{g}^{\lambda\alpha}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{g}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\epsilon\tau}+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{g}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\alpha\tau}+$$

$$+D_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\beta}D_\beta\tilde{g}^{\lambda\alpha}-\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\}\,. \qquad (\Gamma.5)$$

Следует особо подчеркнуть, что при нахождении выражения (Г.5) мы использовали уравнение (Г.2). Подставляя (Г.5) в уравнение (76) и записывая полученное уравнение в форме (93), найдем выражения для величины $-16\pi g\tau_g^{\epsilon\lambda}$:

$$-16\pi g\tau_g^{\epsilon\lambda}=\frac{1}{2}(\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta})(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\mu}-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\tau\sigma}\tilde{g}_{\nu\mu})D_\alpha\tilde{\Phi}^{\tau\sigma}D_\beta\tilde{\Phi}^{\mu\nu}+$$

$$+\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\epsilon\tau}D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\sigma}-\tilde{g}^{\epsilon\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\lambda\sigma}D_\beta\tilde{\Phi}^{\alpha\tau}-\tilde{g}^{\lambda\alpha}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\tau}+$$

$$+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\sigma\beta}D_\beta\tilde{\Phi}^{\alpha\tau}+D_\alpha\tilde{\Phi}^{\epsilon\beta}D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\alpha}-\tilde{\Phi}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}-$$

$$-m^2(\sqrt{-g}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}-\sqrt{-\gamma}\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}+\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}\gamma_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}). \qquad (\Gamma.6)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Власов А.А., Логунов А.А., Мествиришвили М.А.** — ТМФ, 1984, т.61, No.3, с. 323-326.
Логунов А.А., Мествиришвили М.А. ТМФ, 1984, т.61, No.3, с. 327-345.
Logunov A.A., Mestvirishvili M.A. — The Relativistic Theory of Gravitation. M.: Mir, 1989;
Логунов А.А., Мествиришвили М.А. — Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989;
Логунов А.А. — ТМФ, 1994, т.101, No.1, с. 3-27.
2. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** — Теория поля. М.: Наука, 1973.
3. **Мандельштам Л.И.** — Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972.
4. **Эйнштейн А.** — Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965, т.1, с.22.
Паули В. — Теория относительности. М.: Гостехиздат, 1947.
Мёллер К. — Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975.
Bohm D. — The Special Theory of Relativity. W.Y.Benjamin, inc., 1965.
5. **Логунов А.А.** — Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы. М.: Наука, 1987.
6. **Эйнштейн А.** — Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965, т.1, с.21.
7. **Логунов А.А., Лоскутов Ю.М.** — ДАН, 1989, т.305, No.4, с.848-851.
8. **Rozen N.** — Phys.Rev. 1940, v. 57, p.147.
9. **Синг Дж.** — Общая теория относительности. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
10. **Мах Э.** — Механика. Историко-критический очерк ее развития. (Глава 2. Развитие принципов динамики). В сб.: А.Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979.
11. **Poincare H.** — Bulletin des Sciences Mathematiques, 1904, v.28, ser.2., p.302-328.
12. **Hawking S.W., Penrose R.** — The singularities of gravitational collapse and cosmology. Phys.Rev. London, 1970, A314, p. 529.
Хокинг С., Эллис Дж. — Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.
13. **Фок В.А.** — ЖЭТФ, 1939, т.9, No.4, с.375.
14. **Фок В.А.** — Теория пространства, времени и тяготения. М.:Гостехиздат, 1961.
15. **Логунов А.А., Лоскутов Ю.М.** — ТМФ, 1988, т.76, No.2, с.163-168.
16. **Лоскутов Ю.М.** — ТМФ, 1990, т.82, No.2, с.304-312.
17. **Власов А.А., Логунов А.А.** — ТМФ, 1989, т.78, No.3, с.323-329.
18. **Лоскутов Ю.М.** — Вестник Московского университета, 1991, сер.физ.астрон., т.32, No.4, с.49.
Loskutov Yu.M. — Proc. of the VI-th Marcel Grossman meeting on Gen.Rel.Part B. Kyoto, Japan, 1991, p. 1658-1660.